

## Zadání IV. série



*Termín odeslání: 10. března 1997*

### Úloha IV.1 ... sever

Je to už dávno, co jsme my, organizátoři, chodili na své základní školy. Nicméně si všichni dobře pamatujeme, že jsme se učili, jak pomocí ručičkových hodinek a polohy Slunce na obloze přibližně stanovit sever. Po vás bychom chtěli, abyste nám vysvětlili, jak to funguje, proč to funguje a s jakou přesností (přibližně).

### Úloha IV.2 ... Pepek námořník

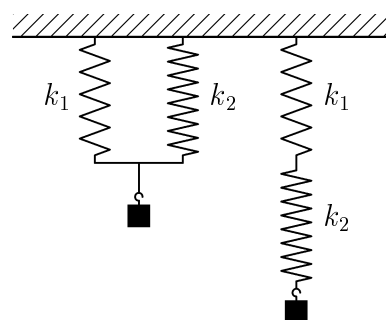
Spočtete práci, kterou musí vykonat námořník na to, aby svinul plachtu o hmotnosti  $M$ , která má šířku  $a$  a výšku  $b$ . Plachta visí celá svisle dolů z ráhna a námořník ji navíjí na ráhno konstantní rychlostí.

### Úloha IV.3 ... měření tlaku vzduchu v zimě

Fyzikální expedice potřebuje změřit tlak vzduchu ve svém táboře, aby si mohla být jistá, že jí nehrozí vysokohorská nemoc (už i tak jim hrozí umrznutí, protože je přesně  $-30^\circ\text{C}$ ). Shodou okolností mají s sebou rtuťový barometr s hliníkovou stupnicí a naměřili tlak vzduchu 750 Torr. Jaký byl ve skutečnosti tlak vzduchu, jestliže jsou barometr i měřidlo cejchovány pro teplotu  $0^\circ\text{C}$ ?

### Úloha IV.4 ... napjatá situace

Mějme dvě pružiny o tuhosti  $k_1$  a  $k_2$ . Jaký bude poměr period kmitů, jestliže na ně pověsíme závaží, pokud jsou v prvním případě pružiny spojeny „sériově“ a ve druhém „paralelně“ (viz obr. 1)? V „paralelním“ případě je závaží umístěno tak, že hrazdička je stále vodorovná.



Obr. 1

### Úloha IV.5 ... fotbalistický problém

Fotbalista vykopne míč a udělí mu kromě posuvné rychlosti i rotaci okolo svislé osy. Na kterou stranu od původního směru se míč začne odchylovat v závislosti na smyslu rotace a proč? Míč považujte za ideální kouli, odpor vzduchu nezanedbávejte.

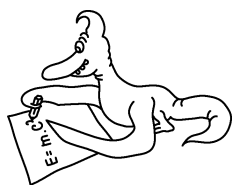
### Úloha IV.6 ... experimentální

Tentokrát je vaším experimentálním úkolem změřit další fyzikální vlastnost vody, totiž její hustotu. Aby nevznikaly velké zmatky, vymysleli jsme pro vás tento postup měření: Do vody ponoříme nádobu dnem vzhůru, původně celou naplněnou vzduchem. Jak se nádoba ponořuje, tak se do nádoby postupně dostává voda. Vymyslete, jak tímto postupem zjistíte hustotu vody a pokuste se navrhnout takové experimentální uspořádání, abyste dosáhli maximální přesnosti. Znáte atmosférický tlak a tíhové zrychlení.

V minulé, předvánoční sérii jsme vám přislíbili vánoční dárek v podobě **Dne s experimentální fyzikou**. FKS sliby plní a tak v úterý **4. března 1997 od 9:00 do 15:00** očekáváme všechny vědychtivé řešitele v prostorách MFF UK v Tróji. Během tohoto Dne, který pořádáme výhradně pro vás, budete moci navštívit školní reaktor Vrabc, urychlovač

částic, pracoviště nízkých teplot. Uvidíte, jak to vypadá v nitru Země, spatříte poslední druh polymerů. . .

Pokud se chcete zúčastnit této jedinečné akce (která se koná pouze jednou do roka), tak nám do 17.2. napište nebo zavolejte na záznamník (02) 2191 2493, že se závazně přihlašujete. Obdržíte podrobný itinerář celého dne, popis cesty do MFF UK i omluvenku do školy.



## Řešení II. série

### Úloha II.1 ... rohové zr-

**cadlo** (5 bodů, řešilo 107 studentů)

Nejprve několik vět úvodem. Úloha zněla: „... kolikrát uvidíte svůj obraz v zrcadlech. . .“ To znamenalo, že jako předmět sloužilo vaše tělo (vaše oko), nikoliv bod. Autor úlohy (já) chtěl, abyste uvažovali reálný případ. Samozřejmě, že to přináší problémy. Pokud totiž máte oči dvě, uvidíte se obecně (tj. v některých polohách) vícekrát, nežli jednooký. Jelikož jsem předpokládal, že problémy při řešení úlohy nastanou, myslel jsem si (naivka důvěřivá), že použijete zrcátka, zrcadla, prostě cokoliv, aby jste si to zkusili a přišli věci na kloub. V naprosté většině případů se tak nestalo, a navíc vás při obdržení vztahu pro počet obrazů ani nenapadlo si jej zkontrolovat. Vzhledem k tomu, že by se úloha v případě dvou očí stala komplikovanou (vzdálenost očí, dominance jednoho z nich. . .), uvažoval jsem nakonec následující formulaci úlohy za výstižnější: „Kolikrát uvidí zornička sama sebe?“

#### Řešení

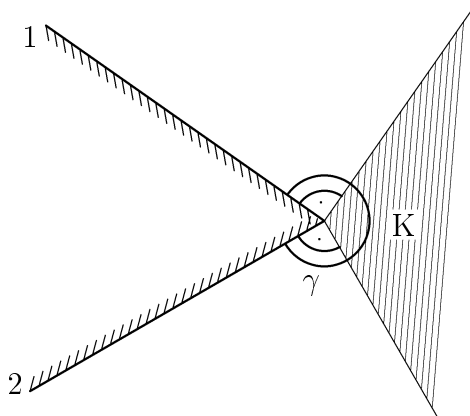
Nejprve si uvědomme, co vlastně znamená, že se zornička uvidí v zrcadle. Znamená to, že paprsek, který „z ní“ vyšel, na ni zpět dopadne.

Úlohu budeme řešit bez překážky (v případě překážky se postupuje obdobně, ale je to zdoluhavé) pro obecný úhel  $\gamma$  (v zadání to byl úhel  $\alpha$ !) a budeme diskutovat tři případy:

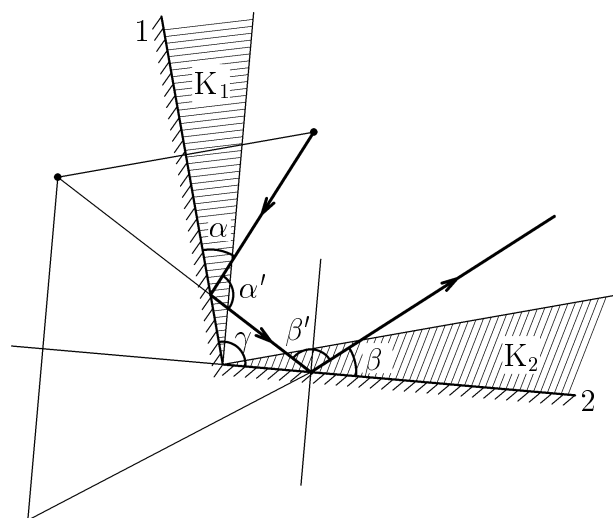
i) ( $180^\circ \leq \gamma < 360^\circ$ )

Je zřejmé, že pokud se paprsek odrazí od jednoho ze zrcadel, nikdy se neodrazí od toho druhého. To znamená, že maximální počet odrazů paprsku, vycházejícího ze zorničky tak, aby na ni dopadl zpět, je roven jedné. Zornička se tedy uvidí 1-krát.

Nemusí se ale vidět ani jednou a to v tom případě, že je v oblasti  $K$ , ze které neexistuje ani jedna kolmice na jedno ze zrcadel (viz obr. 2).



Obr. 2



Obr. 3

ii) ( $90^\circ < \gamma < 180^\circ$ )

Uvažujme případ, že se paprsek vycházející ze zorničky odrazil nejprve od jednoho zrcadla, pak od druhého a dopadl zpět na zorničku (viz obr. 3). Je dobré si také uvědomit, že pokud se paprsek pohybuje směrem do vrcholu úhlu svíraného zrcadly, pak se každý následující úhel odrazu liší od předchozího o úhel  $\gamma$ , a pokud se paprsek vrací, liší se o úhel  $-\gamma$ .

Pokud paprsek dopadá pod úhlem  $\alpha$  na zrcadlo 1, dopadne na zrcadlo 2 pod úhlem  $180^\circ - (\alpha + \gamma)$ . Aby se paprsek mohl vrátit do zorničky, musel by být úhel  $\alpha' + \beta'$  menší než  $180^\circ$ , t.j.  $\gamma \leq 90^\circ$ . To však není v tomto případě splněno. Zároveň je zřejmé, že žádný z paprsků, které se jednou odrazily od každého ze zrcadel, se nikdy neodrazí potřetí.

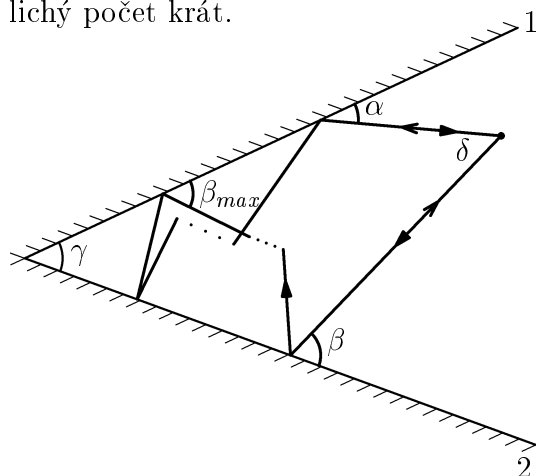
Zbývá možnost, že se paprsek odrazí právě jednou od jednoho ze zrcadel. Paprsek vycházející ze zorničky se může odrazit jednak od zrcadla 1 a vrátit se zpět, jednak od zrcadla 2 a vrátit se zpět. To znamená, že paprsek pokaždé dopadá kolmo na dané zrcadlo. Vždy nastane alespoň jedna z těchto možností. Může se ale stát, že opět neexistuje kolmice vedená ze zorničky na jedno ze zrcadel, a pak se uvidí jen jednou (viz obr. 3, oblasti  $K_1$  a  $K_2$ )

Tedy maximálně se zornička v případě ii) uvidí 2-krát, minimálně jednou.

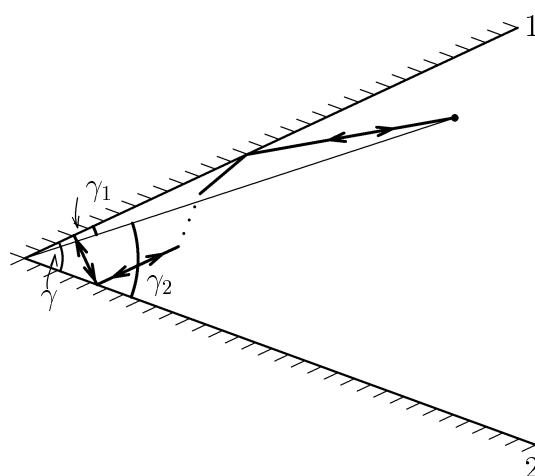
iii) ( $0^\circ \leq \gamma \leq 90^\circ$ )

Budeme uvažovat dvě varianty. Paprsek jdoucí ze zorničky se odrazí, nežli na ni dopadne zpět

- a) sudý počet krát,
- b) lichý počet krát.



Obr. 4a



Obr. 4b

Rozebereme nejprve „sudou“ variantu. Jak již bylo řečeno, pokud paprsek dopadne na zrcadlo 1, potom 2, potom 1, ..., po každém odrazu se velikost následujícího úhlu dopadu zvětší o  $\gamma$ . To platí samozřejmě pouze tehdy, pokud paprsek postupuje směrem do vrcholu úhlu, který zrcadla svírají. Označme jako  $\beta_{max}$  úhel, pod kterým paprsek začíná z úhlu „vystupovat“ (viz schematicky obr. 4a).

Platí, že

$$\beta_{max} = 180^\circ - \alpha - (k - 1)\gamma, \quad (1)$$

kde  $k$  je polovina celkového počtu odrazů. Nežli paprsek dopadne zpět na zorničku, odrazí se  $(k - 1)$ -krát. Označme úhel, který při dopadu do zorničky paprsek svírá se zrcadlem 2, jako  $\beta$  a úhel, který svírá tento paprsek s paprskem vycházejícím ze zorničky, jako  $\delta$ . Vzhledem k tomu, že

$$\beta = \beta_{max} - (k - 1)\gamma \quad (2)$$

a také

$$(180^\circ - \alpha) + (180^\circ - \beta) + \gamma + \delta = 360^\circ, \quad (3)$$

dostáváme pro úhel  $\delta$  rovnici

$$\delta = 180^\circ - (2k - 1)\gamma. \quad (4)$$

Očividně  $0^\circ \leq \delta \leq 90^\circ$ . Odtud plyne pro  $k_{max}$  nerovnost

$$k_{max} \leq (90^\circ/\gamma) + 1/2. \quad (5)$$

Zornička se v „sudé“ variantě iii) uvidí

$$n_S = 2 \text{INT}[(90^\circ/\gamma) + 1/2]\text{-krát} \quad (6)$$

(INT znamená celou část, dvojka je tam proto, že pokud se uvidím v jednom zrcadle, uvidím se i ve druhém; viz v obr. 4a dva druhy šipek, tj. směru cesty pro paprsek).

Přejděme k „liché“ variantě. Při ní, po určitém počtu odrazů, dojde k situaci, že paprsek dopadne na jedno ze zrcadel pod pravým úhlem a vrací se po stejné dráze zpět. To znamená, že platí  $\alpha + k\gamma = 90^\circ$ .

Nicméně zde je nutno si uvědomit, že existuje omezení pro úhel  $\alpha$ . (To je rozdíl od „sudé“ varianty, kde úhel  $\alpha$  v rovnici pro  $k_{max}$  nevystupoval!). Pokud se paprsek ze zorničky odrazí nejprve od zrcadla 1 (viz obr. 4b), je zřejmé, že  $\alpha_{1min} = \gamma_1$ . Tedy

$$k_{1max} = \text{INT}[(90^\circ - \gamma_1)/\gamma]. \quad (7)$$

V případě, že se paprsek nejprve odrazí od zrcadla 2, je

$$k_{2max} = \text{INT}[(90^\circ - \gamma_2)/\gamma]. \quad (8)$$

(Snadno se dá např. ukázat, že rozdíl  $|k_{1max} - k_{2max}| \leq 1$ ). Celkový počet obrazů v liché variantě je tedy

$$n_L = k_{1max} + k_{2max} + 2 \quad (9)$$

(dvojka znamená přímý odraz v zrcadlech).

Celkový počet svých obrazů, které tak zornička uvidí, bude roven

$$n = n_S + n_L. \quad (10)$$

Speciálně pro  $\gamma = 90^\circ$  bude  $n_S = 2$ . Nicméně se zornička „sudou“ variantou uvidí jen jednou. To proto, že paprsek z ní vycházející bude rovnoběžný s paprskem vcházejícím, t.j. přicházejí ze stejného (pro zorničku!) místa, a ona je nemůže rozlišit. (Pokud bychom zorničku nahradili bodem, vracějící se paprsek by jej minul. Zde hraje roli konečná velikost zorničky.)

Tento případ nastane pro všechny úhly  $\gamma$ , pro něž nastává v nerovnici (5) rovnost. V daných případech je tedy nutno odečíst jedničku od celkového počtu obrazů. (Je užitečné si to nakreslit, aby bylo vidět, že vlastně uvidíte všechny blízké body zobrazovaného bodu, jen tento bod ne.)

A tak se zornička pro  $\gamma = 90^\circ$  uvidí 3-krát.

Pokud je v místnosti překážka ( $\gamma = 90^\circ$ ), uvidí se zornička pouze dvakrát, protože překážka ze zadání stojí v cestě jednomu paprsku. Pokud by tato překážka byla posunutá nevhodněji, viděla by se zornička pouze jednou, případně ani jednou.

Nakonec bych ještě rád zdůraznil, že vztah pro  $n$  se liší od vámi často uváděného

$$n = \text{INT}[360^\circ/\gamma] - 1. \quad (11)$$

Jako příklad bych uvedl  $\gamma = 72^\circ$ . V tomto úhlu existují dvě oblasti, ve kterých se zornička uvidí 5-krát, a jedna oblast, ze které se uvidí jen 4-krát.

No a to je vše.

*Tomáš Sýkora*

**Úloha II.2 ... magnetické kyvadlo** (5 bodů, řešilo 60 studentů)

Nejprve uveďme kvalitativní řešení, které pokud bylo dobře diskutováno, postačovalo jako řešení úlohy. Na kuličku působí magnetická síla, která je dána vektorovým součinem

$$\mathbf{F}_m = Q\mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (12)$$

Magnetické pole způsobuje zakřivení dráhy kuličky. Síla, kterou působí na kuličku, ji dle Flemingova pravidla levé ruky odchyluje doleva ve směru jejího pohybu (v zadání úlohy míří magnetické pole ve směry osy  $-z$ ), její dráha musí být odpovídajícím způsobem prohnuta. Uvážíme-li, že dominujícím pohybem kuličky je pohyb matematického kyvadla, vypadá její kmitání při pohledu shora dle obr. 8. Na kružnici leží ty body, v nichž je rychlost kuličky nulová. Magnetické pole tedy způsobuje stáčení roviny kyvu kyvadla.

Cílem kvantitativního řešení, kterým se fyzika ve skutečnosti zabývá, je dostat řešením pohybových rovnic závislost polohového vektoru částice na čase  $\mathbf{r}(t)$ . Vycházíme při tom z pohybových rovnic

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F}_g + \mathbf{F}_m, \quad (13)$$

které rozepsané v kartézském systému  $(x, y, z)$  mají tvar

$$\begin{aligned} ma_x &= -BQv_y, \\ ma_y &= BQv_x, \\ ma_z &= -mg. \end{aligned} \quad (14)$$

Toto je komplikovaná soustava rovnic s tzv. vazebnou podmínkou  $x^2 + y^2 + (z - l)^2 = 0$ , která říká, že vzdálenost kyvadla od závěsu je vždy  $l$ . Na řešení takových rovnic existují v teoretické mechanice metody, my se však bez nich klidně obejdeme.

Předně si uvědomíme, že i obyčejné matematické kyvadlo analyticky vyřešíme jen pro malé výchylky  $\alpha$ , kdy můžeme psát  $\sin \alpha = \alpha$ . Potom se pohyb odehrává přibližně v rovině  $z = 0$ . Podle obrázku 5 rozložíme tíhovou sílu na složku kolmou na závěs a složku ve směru závěsu, která se vyruší s vazebnou silou závěsu. Potom síla  $mg \sin \alpha$  působí přibližně proti výchylce  $y$ , pro niž platí  $\sin \alpha = y/l$ . Tím se nám redukuje rovnice (14) na dvojrozměrný problém

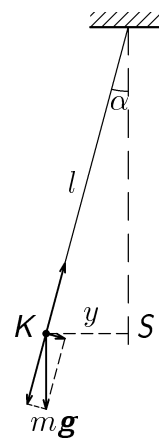
$$\begin{aligned} ma_x &= F_x = -BQv_y - \frac{mg}{l}x, \\ ma_y &= F_y = BQv_x - \frac{mg}{l}y. \end{aligned} \quad (15)$$

Na první pohled jsme si moc nepomohli, neboť před sebou máme soustavu lineárních diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= -\frac{BQ}{m} \frac{dy}{dt} - \frac{g}{l}x, \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= \frac{BQ}{m} \frac{dx}{dt} - \frac{g}{l}y. \end{aligned} \quad (16)$$

Ti z vás, kdo neví, co to diferenciální rovnice jsou, neházejte flintu do žita. A těm, co to vědí, můžeme prozradit, že jsme řešením soustavy (16) strávili jedno příjemné odpoledne. My však matematickou komplikovanost rovnic vyřešíme fyzikální fintou, na kterou nepřišel nikdo z vás.

Náš fígl spočívá v tom, že „náhodou“ víme ještě o jedné síle, která je jako magnetická síla (12) dána vektorovým součinem rychlosti částice a nějakého vektoru. Je to síla Coriolisova. Nejprve vysvětlíme, jak vypadá Coriolisova síla a to, s čím úzce souvisí, a potom vám objasníme ideu finty celého řešení.



Obr. 5

*Pohybový zákon v rotující vztažné soustavě*

Mějme inerciální vztažnou soustavu (IVS)  $\mathfrak{S}'$  a soustavu  $\mathfrak{S}$ , která se vůči ní rotuje kolem společného počátku konstantní úhlovou rychlostí  $\omega$  (viz obr. 6), jedná se tedy o soustavu neinerciální (NIVS). Druhý Newtonův zákon platí jen pro IVS a to v podobě, kterou všichni dobře známe (čárkovaně značím veličiny náležející do  $\mathfrak{S}'$ ):

$$m\mathbf{a}' = \mathbf{F}', \quad (17)$$

V soustavě  $\mathfrak{S}$  však vznikají tzv. zdánlivé síly, které nikterak nesouvisí s fundamentálními interakcemi (s gravitační či elektromagnetickou silou). Tyto síly jsou přímým důsledkem toho, že se soustava  $\mathfrak{S}$  pohybuje vůči všem IVS zrychleně. Pohybový zákon v soustavě  $\mathfrak{S}$  pak můžeme zapsat v podobě

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F} + \mathbf{F}_S, \quad (18)$$

kde  $\mathbf{F}$  je výslednice všech skutečných sil (např. elektrická, magnetická či gravitační síla) a  $\mathbf{F}_S$  je výslednice všech zdánlivých (setrvačných) sil.

V soustavě  $\mathfrak{S}$  působí obecně dvě takové zdánlivé síly. Jednou z nich je **síla odstředivá**, tu všichni dobře znáte z kolotoče,

$$\mathbf{F}_O = m\omega^2[x', y'] \equiv m\omega^2\boldsymbol{\rho}, \quad (19)$$

kde jsme  $\boldsymbol{\rho}$  označili polohový vektor v rovině  $(x, y)$ . Druhou silou je **síla Coriolisova**, která je zodpovědná např. za stáčení pasátních větrů v subtropích. A toto je námi hledaná síla, která nám pomůže úlohu elegantně vyřešit, neboť je podobně jako magnetická síla dána vektorovým součinem (působí kolmo na směr rychlosti)

$$\mathbf{F}_C = 2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}. \quad (20)$$

Platí pro ni stejné zákonitosti, které jsem popsal u síly magnetické. Druhý Newtonův zákon v soustavě  $\mathfrak{S}$  pak má tvar

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F} + m\omega^2\boldsymbol{\rho} + 2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}, \quad (21)$$

což v rovině  $(x, y)$  dává soustavu rovnic

$$\begin{aligned} ma_x &= F_x - 2m\omega v_y + \omega^2 x, \\ ma_y &= F_y + 2m\omega v_x + \omega^2 y. \end{aligned} \quad (22)$$

*Řešení rovnic Halefovou fintou*

Rovnice (22) vypadají velice podobně jako rovnice (15). My provedeme následující figl. Představme si, že rovnice (15) nepopisují působení magnetického a tíhového pole na kyvadlo při jeho malých výchylkách v naší IVS  $(x, y)$ , nýbrž že se jedná o kyvadlo v NIVS  $\mathfrak{S}$  rotující úhlovou rychlostí  $\omega$  a s nulovým magnetickým polem. Jinak řečeno: budeme považovat magnetickou sílu za sílu Coriolisovu, kde

$$\omega = \frac{BQ}{2m}. \quad (23)$$

Proč to všechno děláme? K naší hypotetické NIVS  $\mathfrak{S}$  totiž existuje IVS  $\mathfrak{S}'$ , která má tu vlastnost, že z pohybového zákona (18) se stane zákon (17), ve kterém už žádný vektorový součin  $\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}$  není. Tím se pohybové rovnice velice zjednoduší a nám nebude činit problémy je vyřešit. Nalezneme tak řešení v soustavě  $\mathfrak{S}'$ , které jednoduchou transformací přeneseme zpět do soustavy  $\mathfrak{S}$ .

Celá věc má ještě jeden aspekt, nazval bych jej „kyvadlovým principem relativity“. Představme si, že každé kyvadlo v homogenním magnetickém poli musí mít stejný poměr velikosti náboje a hmotnosti. Tím se pro všechna kyvadla stane magnetická síla jakýmsi „univerzálním vlivem“, všechna kyvadla se budou při malých výchylkách chovat stejně. Podle pohybu kyvadla pak nikdo nepozná, jestli je daný systém v klidu v magnetickém poli, anebo se rovnoměrně otáčí. (Tento náš princip bohužel snadno nabouráme, neboť existuje řada dalších fyzikálních jevů, které jednoznačně ukáží, jestli soustava rotuje nebo ne. Např. existují nenabitá kyvadla, každé těleso není upevněno nad počátkem souřadné soustavy atp.)

Přidáme-li do (15) nulu, tzn. přičteme a odečteme  $m\omega^2x$ , resp.  $m\omega^2y$ , rovnice budou mít tvar

$$\begin{aligned} a_x &= -\left(\frac{g}{l} + \omega^2\right)x - 2m\omega v_y + \omega^2x, \\ a_y &= -\left(\frac{g}{l} + \omega^2\right)y + 2m\omega v_x + \omega^2y. \end{aligned} \quad (24)$$

Srovnáme-li rovnice (24) s (22), vidíme, že výrazy  $-\Omega^2x$  a  $-\Omega^2y$ , kde jsme označili

$$\Omega^2 = \frac{g}{l} + \omega^2, \quad (25)$$

hrají roli složek síly  $\mathbf{F}$  v rovnici (18).

Nyní stačí jenom vědět, jak se transformují složky síly do soustavy  $\mathcal{S}'$ , vůči níž se  $\mathcal{S}$  otáčí, a tuto transformaci odvodíme z obr. 6. Velice snadno zjistíte, že

$$\begin{aligned} x &= x' \cos \omega t + y' \sin \omega t, \\ y &= -x' \sin \omega t + y' \cos \omega t, \end{aligned} \quad (26)$$

Jedná se jenom o hledání těch správných pravoúhlých trojúhelníků, jejichž odvěsny dohromady poskládají  $x$  a  $y$ . Inverzní transformace z  $\mathcal{S}$  do  $\mathcal{S}'$  vychází

$$\begin{aligned} x' &= x \cos \omega t - y \sin \omega t, \\ y' &= x \sin \omega t + y \cos \omega t, \end{aligned} \quad (27)$$

neboť soustava  $\mathcal{S}'$  se vůči  $\mathcal{S}$  otáčí s úhlovou rychlostí  $-\omega$ . Jelikož síla  $\mathbf{F}$  je úměrná vektoru  $[x, y]$ , ihned odtud vyplývá, že v soustavě  $\mathcal{S}'$  bude mít tvar

$$\mathbf{F}' = [-\Omega^2x', -\Omega^2y'], \quad (28)$$

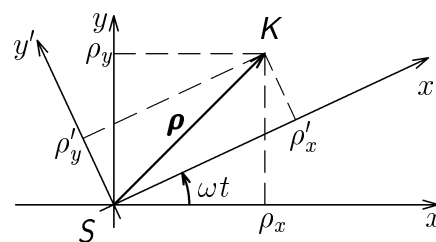
a tedy musíme v  $\mathcal{S}'$  řešit dvě rovnice, které už nejsou mezi sebou provázány,

$$\begin{aligned} a'_x &= -\Omega^2x', \\ a'_y &= -\Omega^2y'. \end{aligned} \quad (29)$$

Rovnice (29) určitě všichni poznáváte, jejich řešením jsou obyčejné kmity, neboť zrychlení je přímo úměrné výchylce, ale opačného směru. Ale pozor, jsou to obecně eliptické kmity, neboť zde velice záleží na počátečních podmínkách.

Obecné řešení rovnic (29) napíšeme jako superpozici harmonických funkcí sin a cos:

$$\begin{aligned} x' &= K \sin \Omega t + L \cos \Omega t, \\ y' &= M \sin \Omega t + N \cos \Omega t, \end{aligned} \quad (30)$$



Obr. 6

konstanty  $K$ ,  $L$ ,  $M$ ,  $N$  musíme dopočítat z počátečních podmínek (např. konkrétně pro hodnoty  $K = N \neq 0$ ,  $L = M = 0$  dostáváme obyčejné kruhové kmity). V čase  $t = 0$  platí (počátek soustavy souřadné odpovídá rovnovážné poloze kyvadla – bod  $S$  na obr.1):

$$\begin{aligned} y'(0) &= \xi, & v'_y(0) &= 0, \\ x'(0) &= 0, & v'_x(0) &= -\omega\xi, \end{aligned} \quad (31)$$

kde jsme označili počáteční výchylku ve směru  $y$  (a tím i  $y'$ )  $\xi = l \sin \alpha$ . Rychlost  $v_x(0)$  jsme zvolili nulovou, a proto v soustavě  $\mathfrak{S}'$  je  $v'_x(0) = -\omega\xi$ , neboť se celá  $\mathfrak{S}'$  otáčí vůči  $\mathfrak{S}$  úhlovou rychlostí  $-\omega$ .

Ze známého vzorečku  $v = \omega r$  pro rovnoměrný pohyb po kružnici, a uvážíme-li, že rychlosti jsou maximální tam, kde jsou nulové polohy, a naopak, snadno odvodíme

$$\begin{aligned} v'_x &= K\Omega \cos \Omega t - L\Omega \sin \Omega t, \\ v'_y &= M\Omega \cos \Omega t - N\Omega \sin \Omega t, \end{aligned} \quad (32)$$

Dosadíme-li počáteční podmínky (31) do rovnic (32) a (30), získáme:  $K = -\xi\omega\Omega$ ,  $L = 0$ ,  $M = 0$ ,  $N = \xi$ . V soustavě  $\mathfrak{S}'$  má řešení naší úlohy tvar

$$\begin{aligned} x' &= -\frac{\xi\omega}{\Omega} \sin \Omega t, \\ y' &= \xi \cos \Omega t. \end{aligned} \quad (33)$$

V soustavě  $\mathfrak{S}'$  kyvadlo vykonává eliptické kmity, jak je to vidět na obrázku 7.

Teď už stačí provést transformaci zpět do soustavy  $\mathfrak{S}$  podle vztahu (26). Řešení naší úlohy pak vypadá takto:

$$\begin{aligned} x &= \xi \cos \Omega t \sin \omega t - \frac{\xi\omega}{\Omega} \sin \Omega t \cos \omega t, \\ y &= \xi \cos \Omega t \cos \omega t + \frac{\xi\omega}{\Omega} \sin \Omega t \sin \omega t. \end{aligned} \quad (34)$$

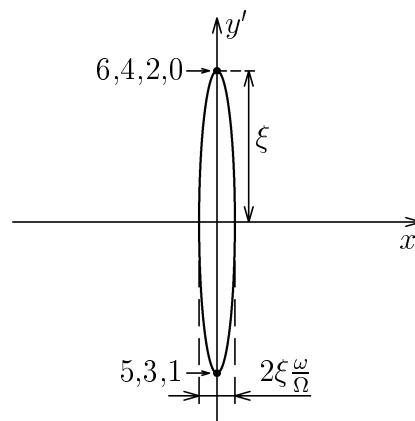
Za použití stejných počátečních podmínek bychom dospěli výsledku (34) řešením rovnic (16). Cílem této úlohy v žádném případě nebyl výklad řešení soustavy diferenciálních rovnic. Uznávám, že námi použitá finta není úplně triviální, pokud jste ji ale pochopili, měli byste mít jasno v tom, co to vlastně ty zdánlivé síly jsou.

Na obr. 8 se skutečně můžeme přesvědčit, že pohyb kyvadla v našem přiblížení (34) kvalitativně souhlasí s tím, co jsme předpověděli v úvodu (vektor  $\mathbf{B}$  jsme zvolili ve směru osy  $z$ , proto se kyvadlo stáčí na obrázku doprava!).

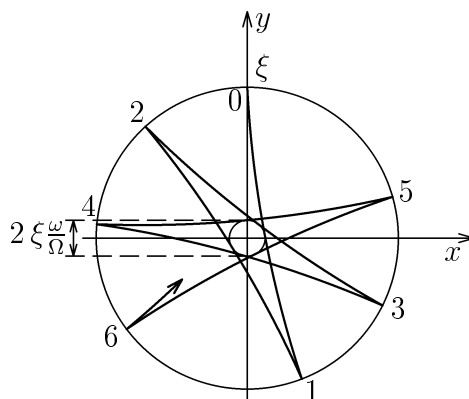
### Závěr

Kyvadlo bude kmitat s úhlovou frekvencí  $\Omega$ , přičemž ale nikdy neprojde rovnovážnou polohou. Během kmitání se stáčí vždy doleva, směruje-li magnetické pole ve směru osy  $-z$  a naopak doprava, je-li  $\mathbf{B}$  ve směru  $z$ , a to tak, že polohy maximálních či minimálních výchylek se stáčí úhlovou rychlostí  $\Omega$ . Kyvadlo tak dělá charakteristické „špičky“. Nejmenší vzdálenost od počátku souřadné soustavy je  $\xi\omega/\Omega$ .

Pro zadané hodnoty získáme: počáteční výchylka  $\xi = 12$  cm, frekvence  $\omega = -1,3 \cdot 10^{-4}$  Hz (vektor  $\mathbf{B}$  směruje ve směru osy  $-z$ ), úhlová frekvence  $\Omega = 3,1$  Hz. Tyto hodnoty samozřejmě vůbec neodpovídají obrázkům, kde byl použit poměr frekvencí asi 1 : 8,5. Magnetická síla je mnohem slabší než tíhová, a tak za těchto podmínek můžeme mluvit o „stáčení roviny kyvů“



Obr. 7



Obr. 8



kyvadla“, neboť velikost vedlejší poloosy  $\xi\omega/\Omega$  z obrázku 3 je zanedbatelná vůči hlavní poloosě  $\xi$ , je asi desetitisíckrát menší. Stejně tak můžeme zanedbat  $\omega$  ve vztahu (25). Dostáváme tak obyčejné matematické kyvadlo kmitající s periodou 2 s, jehož rovina kyvů se otočí kolem dokola za 14 hod.

### Poznámka

Úplně stejný pohyb vykazuje populární **Foucaultovo kyvadlo**, na které působí námi použitá Coriolisova síla s tím, že úhlová frekvence rotace poloh maximální a minimální vzdáleností od rovnovážné polohy kyvadla je  $\omega = \omega \sin \phi$ , kde  $\phi$  je zeměpisná šířka. To souvisí s tím, že na pohyb kyvadla v našem přiblížení má vliv pouze složka vektoru  $\boldsymbol{\omega}$  ve směru tíhového zrychlení. V naší zeměpisné šířce ( $\phi = 45^\circ$ ) se Foucaultovo kyvadlo otočí kolem dokola asi za 34 hod; na severní polokouli se stáčí doprava, kdežto na jižní polokouli doleva. Kdybychom chtěli naše magnetické kyvadlo experimentálně změřit, museli bychom přihlídnout i k rotaci Země, která rovněž způsobuje stáčení roviny kyvů, neboť jsou oba jevy řádově srovnatelné.

Někdy se stáčení Foucaultova kyvadla vysvětluje tak, že se nemění orientace roviny kyvů vůči stálícím, což není obecně pravda, platí to jenom na pólech. Je to například vidět z toho, že za jeden den se ocitneme ve stejné pozici vůči stálícím, avšak kyvadlo rotační pohyb zdaleka ještě nedokončilo. Správným vysvětlením pohybu Foucaultova kyvadla je jen a jen působení Coriolisovy síly, která je důsledkem toho, že soustava spjatá se zemí je neinerciální.

**Halef & Daniel Král'**

### Úloha II.3 ... jarový tryskáč (3 body, řešilo 94 studentů)

Celou soustavu můžeme považovat za dvourozměrnou (v rovině hladiny, neuvolňuje se tedy žádná potenciální energie skrytá v gravitačním poli). Hladinu vody považujeme za pružnou blanku, která má tendenci smrštit se na co nejmenší plochu, ale gravitace jí to nedovolí. Energie uskladněná v této ploše je dána vzorcem

$$\Delta E = \sigma \Delta S, \quad (35)$$

tedy vnitřní energie je úměrná ploše hladiny. Konstantu úměrnosti  $\sigma$  nazýváme povrchové napětí (vody) a jeho hodnota je přibližně  $73 \text{ mJ}\cdot\text{m}^{-2}$ . Kápnutím čistícího prostředku se ale nevolní celá tato energie, rozvine se totiž povrch nové kapaliny – jaru. Ten má určitě také nějaké povrchové napětí. To se mi nepodařilo najít v žádných tabulkách, je však menší než povrchové napětí vody. Ono rozlité nutně nějakou energii spotřebuje, ale bude to méně, než voda dodá. Tolik energetické hledisko.

Z hlediska sil je to přibližně takto: Představme si místo lodičky, řekněme sirku, na jejíž jedné straně je čistá hladina a na druhé taky. Na každou stranu sirky působí povrchové napětí vody, které je v rovnováze a má velikost 73 mN na každý metr sirky. Kápnutím jaru, mýdla nebo jiné látky o nižším povrchovém napětí se tato rovnováha poruší a na sirku bude působit nenulová výsledná síla směrem do čisté vody. Pokud nebude ono těleso (sirka, lodička, cokoli plovoucího) připevněno, dá se do zrychleného pohybu, který přejde ve zpomalený, protože se skvrna rozšíří, tím hnací síla zanikne a nakonec odporové síly pohyb loďky zastaví. Učiňme odhad, jak rychle se může naše lodička pohybovat za nějakých rozumných podmínek a to: povrchové napětí jaru 20 mN, šířka lodičky  $l = 5 \text{ cm}$ , její hmotnost  $m = 25 \text{ g}$ , konečný poloměr jarové skvrny  $r = 20 \text{ cm}$ . Energie lodičky na konci zrychleného pohybu se bude rovnat energii vynaložené silami povrchového napětí,

$$\frac{1}{2}mv^2 = lr(\sigma_{\text{H}_2\text{O}} - \sigma_{\text{jar}}) \quad (36)$$

a odtud

$$v = \sqrt{\frac{2lr}{m}(\sigma_{H_2O} - \sigma_{jar})} = 0,2 \text{ m.s}^{-1}. \quad (37)$$

Zákon zachování energie jako celek samozřejmě narušen není. Při výše popsaném ději se pouze přeměňuje jedna forma energie ve druhou a to potenciální energie (avšak ne ve smyslu gravitačního potenciálu!) soustavy jar–voda na kinetickou energii lodičky. Pokud bychom chtěli vrátit jar do láhve, na jeho shromáždění a hlavně odtržení z hladiny bychom potřebovali minimálně tolik energie, kolik jí získalo naše plavidlo při rozjezdu.

**Honza Mocek**

#### Úloha II.4 ... zrcadla (4 body, řešilo 61 studentů)

Úloha byla pro většinu z vás jednoduchá, ale v některých řešeních se často opakovaly tytéž chyby. Byly to zejména tyto:

- *Neznalost znaménkové konvence.* Pokud chceme při řešení fyzikální úlohy použít vzorec opsaný z tabulek, musíme vědět, co do něj máme dosadit. Pro úlohy z optiky je často podstatné zjistit, jaká znaménka mají námi používané veličiny, což nám umožňuje tzv. znaménková konvence. Znaménková konvence nejčastěji používaná na našich středních školách praví asi tolik, že veličiny měřené před zrcadlem jsou kladné, za zrcadlem záporné. (Podrobněji např. *E. Svoboda – Přehled středoškolské fyziky, SPN 1991, str. 468, 471, 472.*) Každá taková konvence má svoje vzorečky, a proto je nanejvýše nevhodné přecházet během výpočtu od jedné konvence k jiné. Pokud používáte nějakou konvenci, tak do výpočtu uveďte jakou, jinak se v něm nikdo jiný (např. opravovatel) nevyzná.
- *Nesprávné konstruování obrazu.* Někteří z vás si neuvědomili, že k tomu, aby někde vznikl obraz našeho předmětu, nestačí pouze jeden paprsek vycházející z bodu  $S$ . K tomu je třeba, aby se někde protuly všechny paraxiální paprsky. Řešení popisující chod jediného paprsku by bylo opodstatněné jedině v tom případě, že by zdroj světla vysílal pouze jeden nerozbíhavý paprsek (např. laser), což nikdo z vás ve svém řešení nepoznamenal.

Ve vzorovém řešení budeme používat výše popsanou středoškolskou znaménkovou konvenci. Bod  $S$  zobrazíme nejprve např. vypuklým zrcadlem a poté dutým. Obraz  $S_1$  vzniklý prvním zobrazením bude vzorem pro druhé a jeho výsledek  $S_2$  bude shodný s bodem  $S$ .

Zobrazovací rovnice pro vypuklé zrcadlo:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{a'} = -\frac{2}{R}, \quad (38)$$

$a$  – předmětová vzdálenost,  $a'$  – obrazová vzdálenost.

Zobrazovací rovnice pro duté zrcadlo:

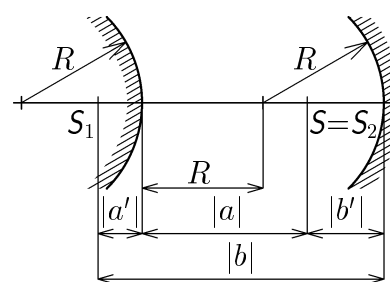
$$\frac{1}{b} + \frac{1}{b'} = \frac{2}{R}, \quad (39)$$

$b$  – předmětová vzdálenost,  $b'$  – obrazová vzdálenost.

Podle výše uvedených předpokladů platí také rovnice

$$a' + b = 2R, \quad (40)$$

$$a + b' = 2R. \quad (41)$$



**Obr. 9**

Nyní máme čtyři rovnice o čtyřech neznámých, z nichž snadno dopočítáme například  $a$ . Vyjde kvadratická rovnice se dvěma reálnými kořeny

$$a_1 = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}R \quad \text{a} \quad a_2 = \frac{1 - \sqrt{3}}{2}R. \quad (42)$$

První kořen zjevně vyhovuje zadání úlohy, zatímco druhý nikoliv, neboť leží mimo oblast mezi zrcadly. Takto mělo vypadat řešení hodnocené čtyřmi body.

*Několik poznámek na závěr:* Je také možné uvažovat nejprve zobrazení dutým a potom vypuklým zrcadlem. Výsledek musí vyjít stejně. Nemuseli jste považovat zdroj světla za bod, mohli jste mu přisoudit nějakou výšku. Pokud by vám nevadilo převrácení obrazu, výsledek by byl opět stejný. Jeden z vás si povšiml, že druhý kořen kvadratické rovnice je roven  $a'$ . Je to způsobeno tím, že na způsob výpočtu nemá vliv, zda za zdroj považujeme bod  $S$  nebo  $S_1$ . Nic to nemění na tom, že zdroj do tohoto bodu umístit nelze. Za tento postřeh byl udělen prémiový bod.

**Jirka Franta**

### Úloha II.5 ... *vesmírná dvojčata* (5 bodů, řešilo 82 studentů)

Než přistoupíme k řešení úlohy, provedme myšlenkový experiment z pořadu Auto-motorevue. Posadíme Michala do automobilu Trabant jedoucího stálou rychlostí  $103 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$  po rovném úseku dálnice a dejme mu do ruky jablko. Michal je tvor hravý, a tak si začne jablkem pohazovat. Co uvidí nezávislý pozorovatel CIA jedoucí s Michalem v Trabantu? Michal vyhodí jablko svisle vzhůru a to mu zase dopadne do ruky (ostatně si to každý může zkusit, máte-li doma Trabanta a jablka). Postavme na okraj dálnice některého řešitele úlohy II.5 splňujícího kritérium, že obdržel 0 bodů, a nechme ho popsat situaci. Dočkali bychom se asi tohoto: „Trabant se pohybuje rychlostí  $u_t = 103 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$  ve směru kladné osy  $x$ . Michalova ruka v okamžiku  $t_1$  vyhodí v místě o souřadnicích  $[x, y]$  jablko a to za čas  $t_2$  dopadne zpět na místo o souřadnicích  $[x, y]$ , neboť jablko se pohybovalo směrem vzhůru. Michalova ruka se v okamžiku dopadu jablka bude nacházet v místě o souřadnicích  $[x + u_t t_2, y]$ . A tak Michal jablko nechytí.“ Náš řešitel si totiž neuvědomil, že jablko bylo vyhozeno z Michalovy ruky a má tedy ve směru osy  $x$  rychlost  $u$ . Proto jablko dopadne také do místa o souřadnicích  $[x + u_t t_2, y]$ .

Ach jo! Naprostá většina řešitelů si vůbec neuvědomila, že když se budou na celou situaci dívat ze soustavy spojené se Zemí, nebude platit, že úhel, pod kterým signál poletí, je shodný s úhlem, pod kterým signál Michal vyslal (viz obr. 10). Označme si  $\mathbf{w}$  rychlost signálu v soustavě spojené se Zemí. Pohybuje-li se Michal rychlostí  $\mathbf{u}$  a vyšle-li signál rychlostí  $\mathbf{c}$  pod úhlem  $\gamma$ , rychlost letu signálu bude  $\mathbf{w} = \mathbf{c} + \mathbf{u}$  (na úlohu se díváme nerelativisticky). Rychlosti se **vektorově sčítají** a s výjimkou případu  $\mathbf{u} = \mathbf{0}$  zřejmě platí  $\gamma \neq \gamma^*$ , kde  $\gamma^*$  je úhel letu signálu v soustavě spojené se Zemí.

Poslední věta minulého odstavce nám vlastně dává návod k řešení úlohy. Najdeme si takovou soustavu, ve které je rychlost pohybu Michala nulová. V této soustavě pak platí (**ale pouze v této soustavě**)  $\gamma = \gamma^*$ . Touto soustavou je zřejmě soustava spojená s Michalem.

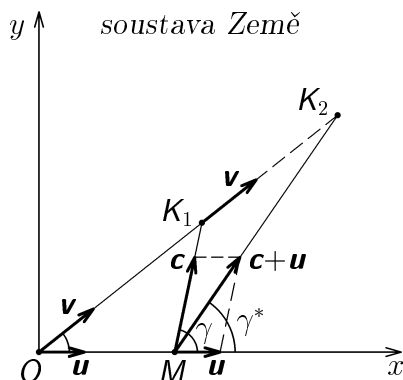
Protože se celá tato soustava pohybuje rychlostí  $\mathbf{u}$ , bude pro rychlost Karla v Michalově soustavě platit<sup>1</sup>

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v} - \mathbf{u}, \quad (43)$$

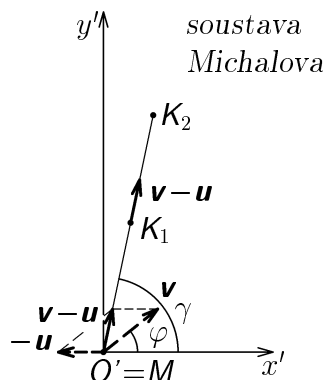
<sup>1</sup>Fyzici tomuto vyjádření rychlostí z pohledu jiné soustavy říkají Galileova transformace rychlostí. Tyto vztahy jsou důsledkem tzv. adičního teorému rychlostí, což je předpoklad, že „Michal jdoucí ve směru jízdy vlaku se vůči Zemi pohybuje rychlostí, která je součtem rychlosti vlaku a rychlosti chůze Michala“. Tento vztah platí, jak známo, s dostatečnou přesností pouze pro rychlosti, které jsou malé ve srovnání s rychlostí světla.

$$\begin{aligned}v'_x &= v_x - u, \\v'_y &= v_y,\end{aligned}\tag{44}$$

kde rovnice 44 jsou pouhým rozepsáním rovnice 43 do složek.



Obr. 10



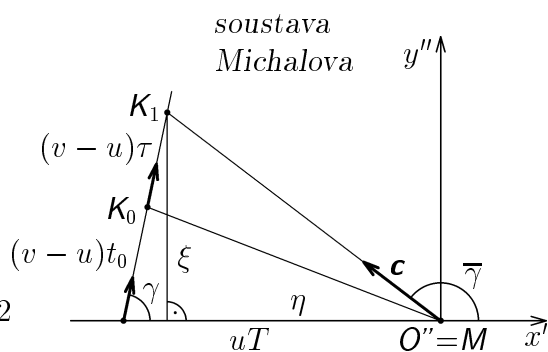
Obr. 11

Ve speciálním případě, kdy  $T = 0$ , se Karel vzhledem k Michalovi pohybuje po přímce, která prochází počátkem Michalovy soustavy, tj. polohou Michala (viz obr. 11). Michal musí vyslat signál tímto směrem. Z obrázku pak snadno nahlédneme, že platí

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{v'_y}{v'_x} = \frac{v_y}{v_x - u} = \frac{v \sin \varphi}{v \cos \varphi - u}.\tag{45}$$

Jiná možnost, jak úlohu vyřešit, je uvážit, že rychlost Karla je malá oproti rychlosti světla. Pak může Michal vyslat signál směrem, kde se momentálně nachází Karel.

Pokud vystartuje Michal o čas  $T$  dříve, bude úhel  $\gamma$  závislý na čase, označme jej  $\bar{\gamma}$ . Na obr. 12 je nastíněna tato situace v soustavě spojené s Michalem: V čase  $t = -T$  vystartuje ze Země Michal, v  $t = 0$  se vydává na svou pouť i Karel, aby po uplynutí doby  $t_0$  mohl Michal vyslat signál (bod  $K_0$ ), který Karel obdrží v čase  $t = t_0 + \tau$  (bod  $K_1$ ). Dráha Karla v Michalově soustavě je přímka se směrnici  $\gamma$  vypočtené podle vzorce (45). Podle obr. 12 pak snadno odvodíme



Obr. 12

$$\operatorname{tg} \bar{\gamma} = \frac{\xi}{\eta} = \frac{\sin \gamma (t_0 + \tau) v}{\cos \gamma (t_0 + \tau) v - uT},\tag{46}$$

kde  $\tau$  je doba letu signálu. Uvědomme si však, že v nerelativistickém případě je doba letu signálu  $\tau$  vůči času  $t_0$  zanedbatelná, neboť dráha, kterou za nějakou dobu urazí Karel je mnohem menší než dráha, kterou za stejnou dobu urazí světlo. Na obrázku to znamená, že splynou úsečky  $MK_0$  a  $MK_1$ . Dobu  $\tau$  je samozřejmě možno spočítat z kosinové věty  $\triangle K_1MK_0$ , což vede na řešení poměrně složité kvadratické rovnice. Výsledek vychází úměrný členům  $v/c$  a  $u/c$ , to znamená, že nemá smysl počítat s časem  $\tau$  v nerelativistickém případě.

$$\operatorname{tg} \bar{\gamma} = \frac{vt_0 \sin \gamma}{vt_0 \cos \gamma - uT},\tag{47}$$

Ze vztahu (47) rovnou vidíme, že pro čas  $t_0 \gg T$  se  $\bar{\gamma}$  blíží  $\gamma$ . To je samozřejmé, neboť za této podmínky je v Michalově soustavě rozdíl mezi směrnici Karlovy dráhy a drahou signálu minimální.

V případě, že jsou rychlosti blízké rychlosti světla, musíme nahradit Galileovu transformaci transformací Lorentzovou<sup>2</sup>. Pohybuje-li se soustava  $\widehat{\mathfrak{S}}$  rychlostí  $u$  vůči soustavě  $\mathfrak{S}$  ve směru osy  $x$ , Lorentzova transformace potom zní (stříškované veličiny jsou vztaženy k pohybující se soustavě  $\widehat{\mathfrak{S}}$ ):

$$\begin{aligned}\widehat{x} &= (x - vt)\zeta \\ \widehat{y} &= y \\ \widehat{t} &= \left(t - \frac{ux}{c^2}\right)\zeta,\end{aligned}\tag{48}$$

kde  $\zeta$  je Lorentzův činitel,

$$\zeta = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}.\tag{49}$$

Uvažujeme-li však relativistické efekty, musíme také použít relativistické vzorce pro skládání rychlostí:

$$\begin{aligned}\widehat{v}_x &= \frac{v_x - u}{1 - \frac{uv_x}{c^2}}, \\ \widehat{v}_y &= \frac{v_y \zeta}{1 - \frac{uv_x}{c^2}}.\end{aligned}\tag{50}$$

Narozdíl od klasického případu se nám v relativitě transformují i složky rychlosti kolmé na směr pohybu soustavy  $\widehat{\mathfrak{S}}$ . Je to dáno prostě tím, že při Lorentzově transformaci nezůstává čas stejný pro různé inerciální systémy, transformuje se stejně jako souřadnice; mluvíme pak o časoprostoru. Označme námi hledaný úhel v relativistickém případě  $\widehat{\gamma}$ . Potom za předpokladu  $T = 0$  platí

$$\operatorname{tg} \widehat{\gamma} = \frac{\widehat{v}_y}{\widehat{v}_x} = \frac{v \sin \varphi}{v \cos \varphi - u \zeta} \frac{1}{\zeta} = \operatorname{tg} \gamma \frac{1}{\zeta} = \operatorname{tg} \gamma \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}.\tag{51}$$

To znamená, že při započtení relativistických efektů se nám  $\operatorname{tg} \widehat{\gamma}$  změní právě o Lorentzovský součinitel  $\zeta$ . To plyne z toho, že v jakékoliv fyzikální souřadné soustavě zůstává rychlost světla stále stejná.

Jako důkaz toho, že dobrý nápad může velmi zjednodušit početní postup, uvádím odvození vztahu (51) podle myšlenky několika řešitelů. V soustavě spojené se Zemí bude situace vypadat geometricky stejně jako v nerelativistickém případě s tou výhradou, že velikost rychlosti světla zůstává  $c$ , sčítá se totiž relativisticky, proto úhel  $\gamma^*$  bude obecně jiný, tento úhel ale k ničemu nepotřebujeme. Co zůstane stejné, je směr, pod kterým zaměřuje Michal Karla, neboť si můžeme představit, že spojíme Michala s Karlem ideálně prodloužitelnou tyčí a po ní vyšleme signál. Jelikož předpokládáme, že vystartovali ve stejnou dobu, nezávisí sklon naší tyče na čase a v soustavě spojené se zemí je jeho velikost právě  $\gamma$ . Vzhledem k tomu, že  $\operatorname{tg} \gamma = y/x$ , kde  $[x, y]$  jsou libovolné souřadnice na tyči, můžeme  $\operatorname{tg} \gamma$  jednoduše ztransformovat podle Lorentzovy transformace (48),

$$\operatorname{tg} \widehat{\gamma} = \frac{\widehat{y}}{\widehat{x}} = \frac{y}{x\zeta} = \operatorname{tg} \gamma \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}.\tag{52}$$

<sup>2</sup>To je obecný postup, jak nahradit transformaci z jedné soustavy do druhé z pohledu klasické mechaniky pohledem mechaniky relativistické.

*Poznámka:* Pro zajímavost uvedeme i odvození vztahů pro relativistické skládání rychlostí. Stačí nám k tomu pouze Lorentzova transformace (48) a znalost obecně platných vztahů  $v_x = \frac{dx}{dt}$  a  $v_y = \frac{dy}{dt}$ . Aplikujme tyto vztahy v soustavě  $\hat{\mathcal{S}}$  za použití (48):

$$\hat{v}_x = \frac{d\hat{x}}{d\hat{t}} = \frac{\frac{dx}{dt} - u}{\zeta \left(1 - \frac{u}{c^2} \frac{dx}{dt}\right)} = \frac{v_x - u}{1 - \frac{uv_x}{c^2}},$$

$$\hat{v}_y = \frac{d\hat{y}}{d\hat{t}} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\zeta \left(1 - \frac{u}{c^2} \frac{dx}{dt}\right)} = \frac{v_y \zeta}{1 - \frac{uv_x}{c^2}}.$$

Na závěr stačí už jenom říci: Umíte-li derivovat, nebojte se relativity, vše si odvodíte. A pokud vám derivace nic neříkají, nebojte se taky, spousta věcí se dá vyřešit jednoduchou úvahou.

*Martin Krsek*

## Úloha II.6 ... *kostka cukru* (7 bodů, řešilo 54 studentů)

### Teorie

Skoro ke každému měření používáme nějakou teorii. Měli bychom tedy zmínit aspoň ty její základy, které s naším měřením bezprostředně souvisejí. Úkolem bylo změřit mez pevnosti cukru v tlaku. Působíme-li na průřez  $S$  pevného tělesa tlakovou silou  $F_p$ , pak v rovnovážném stavu působí v opačném směru síly pružnosti daného materiálu. Míru „napjatosti“ tělesa v nějaké části tělesa o průřezu  $S$  kolmém na vnější tlakovou sílu  $F$  popisujeme veličinou zvanou normálové napětí. Normálové napětí značíme  $\sigma_n$  a platí  $\sigma_n = F_p/S$ , tedy  $[\sigma_n] = \text{Pa}$ . Pro některé pevné látky existuje kritická hranice normálového napětí  $\sigma_p$ , při jejímž překročení dojde k trvalé deformaci.  $\sigma_p$  nazýváme *mez pevnosti v tlaku*. Při pevném průřezu  $S$  tedy existuje pro některé látky kritická síla  $F_{krit}$  taková, že při působení větší silou dojde k trvalé deformaci. Je  $\sigma_p = \frac{F_{krit}}{S}$ .

Kostka cukru je těleso se stálým průřezem. Abychom změřili její mez pevnosti v tlaku, musíme na ni působit tlakovou silou a posléze kostku trvale deformovat. Vhodné je působit pomalu se zvětšující tlakovou silou kolmo na jednu ze stěn kostky, přičemž protější stěna je opřena o podložku.

Uvažme nyní vnitřní strukturu kostky. Kostka je složena z velkého množství drobných krystalků, dle mého pozorování zpravidla menších než 1 mm. Tyto krystalky pojí k sobě nějaká síla, o jejíž povaze by nám asi něco řekli spíš v cukrovaru. Tato síla je však slabší než síly, díky nimž drží pohromadě každý jednotlivý krystalek o sobě. Při dosažení kritického napětí dojde nejprve k porušení „vazeb“ mezi krystalky a kostka se na tyto krystalky rozsype. Teprve kdybychom působící sílu ještě několikanásobně zvětšili, rozdrtili bychom možná i tu hromádku krystalků.

Tlakovou silou musíme působit na stěnu kostky rovnoměrně, na každou plošku  $\Delta S$  této stěny by měla působit stejná síla  $\Delta F$ . Přesto se nevyhneme problémům s „okrajovými jevy“. Na oddělení krystalků dotýkajících se hrany kostky je totiž třeba menší působící síly než na stejné krystalky uvnitř stěny. Důsledky tohoto jevu nám nezbyde než zanedbat, je však třeba zajistit, aby na tyto okraje nepůsobila větší síla než na krystalky uprostřed. Další nepříjemný jev je skutečnost, že když se kostka už jednou začne drolit, sama zabraňuje dalšímu drcení tím, že rozdrčený cukr „překáží“. Je nasnadě, že po úspěšném rozdrčení

cukru odhalíme v hromádce krystalků nějaký nerozdrčený kousek. Také můžeme odhadnout a vzápětí pokusem ověřit průběh deformace: zvyšujeme-li tlakovou sílu  $F_p$ , pak poblíž kritické hodnoty dojde nejprve k narušení „vazeb“ mezi krystalky na ploše, na niž  $F_p$  působí, potom se rozdrťí okraje kostky, následuje destrukce zbytku kostky.

Předmětem dalších úvah je atmosférický tlak. Ten na kostku působí a má velikost asi  $10^5$  Pa. Otázkou však je, jestli více drcení napomáhá, nebo mu brání, neboť tento tlak nepůsobí jen na stěnu, na kterou my působíme tlakovou silou  $F_p$ , nýbrž i na sousední stěny, čímž také pomáhá udržet stabilitu okrajovým krystalkům a brání borcení do stran.

### Postup měření

Navrhli jste celkem asi 4 metody, jak mez pevnosti v tlaku pro cukr kostkový změřit. Ve všech postupech bylo třeba nejprve změřit rozměry kostky. Zde jste mohli buď stanovit odchylku měření, nebo zdůvodnit, proč taková odchylka nemá smysl. Pokud se totiž jednotlivé kostky liší významněji v rozměrech, je třeba změřit rozměry pro každou zvlášť. K měření rozměrů kostky je možno užít posuvné měřítko s noniem, v nejhorším případě i pravítko. Kostky, které se velmi málo se liší, můžeme naklást těsně za sebou do řady a změřit tak jejich průměrnou délku pravítkem (musíme však provést více měření).

(1) Kostku položíme na vodorovnou hladkou podložku, která je dost pevná (ocel apod.) a neohýbá se. Na kostku položíme neohebnou pevnou desku. Na desku klademe pomalu závaží. Když dojde k rozdrčení kostky, zjistíme hmotnost všech použitých závaží. Tato aparatura je jistě velmi nestabilní, při malém naklonění ze zvýší síla působící na některou hranu, ta se začne hroutit a zhrouťí se celá kostka při poměrně malé zátěži. Vhodnější je proto rozmístit na podložku 3 nebo více kostek tak, aby při zatížení na nich spočívající desky působila na každou z kostek stejná síla. Např. 4 kostky umístíme do 4 rohů čtverce, zakryjeme čtvercovou deskou a tu zatížíme. Celkovou hmotnost závaží pak ze zřejmých důvodů dělíme počtem kostek.

(2) Kostku položíme na pevnou podložku vedle osobní váhy. Na kostku dáme pevnou destičku rozměrů o trochu větších než kostka. Zvážíme se, stoupneme si na váhu a velmi pomalu „přenášíme tíhu“ z váhy na kostku, sledující stupnici váhy. Údaj odečtený těsně před rozdrčením odečteme od své hmotnosti a získáme zátěž spočívající v ten okamžik na kostce.

(3) Kostku položíme i s podložkou a nadložkou na osobní váhu a pomalu na vrchní destičku působíme silou svisle dolů, sílu velmi pomalu zvětšujeme. Přitom sledujeme stupnici váhy. Důležitý pro naše měření je údaj odečtený těsně před rozdrčením, neboť během drcení dochází k prudkým výkyvům ručičky vah.

(4) Metody působící na kostku přes nějakou páku, zatěžovanou závažím na různých místech. U těchto metod závisel úspěch značně na jejich provedení. Velmi snadno zde dojde k situaci, že silou nepůsobíme na celou stěnu kostky.

### Vlastní měření

Použil jsem 2 druhy cukru:

a) Cukrovar a rafinerie cukru v Dobrovcích, krychličky o hraně  $a = (12,1 \pm 0,2)$  mm. (Tabulku neuvádím jen proto, že by zabrala moc místa zajímavějším věcem.)

b) Cukr z Pražských cukrovarů o rozměrech ( $a = 21,8 \pm 0,1$ ) mm,  $b = (12,4 \pm 0,2)$  mm,  $c = (11,0 \pm 0,1)$  mm.

(1) Nejdříve jsem se pokusil provést měření s jednou kostkou, ovšem nestabilita zajistila kolaps už při zatížení 10 kg. Podobně dopadla většina řešitelů zvolivších tuto metodu. Pro více kostek jsem postup nerealizoval, neboť vyžadoval příliš velkou zátěž na vhodné podložce.

(2) Kostku jsem vložil mezi dvě ocelové destičky. Naměřené hodnoty jsou uvedeny v následujících tabulkách.

a) Dobrovecký cukr:

|                            |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |
|----------------------------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| $m/\text{kg}$              | 58   | 55   | 40   | 54   | 47   | 39   | 57   | 43   | 38   | 45   |
| $\sigma_p/10^6 \text{ Pa}$ | 3,89 | 3,69 | 2,68 | 3,62 | 3,15 | 2,61 | 3,83 | 2,89 | 2,55 | 3,02 |

Hmotnost zátěže  $m = \bar{m} \pm s(\bar{m}) = (48 \pm 2) \text{ kg}$ , k hrubé chybě nedošlo.

Povrch, na který jsme tlakovou silou působili, byl  $S = (1,46 \pm 0,05) \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$ .

Chyba přístrojů (váhy):  $\pm 0,5 \text{ kg}$  (půl dílku stupnice).

Průměrná mez pevnosti  $\bar{\sigma}_p = 3,2 \cdot 10^6 \text{ Pa}$ .

Standardní odchylka  $s = 0,5 \cdot 10^6 \text{ Pa}$ , k hrubé chybě nedošlo.

Směrodatná odchylka  $s(\bar{\sigma}_p) = 0,2 \cdot 10^6 \text{ Pa}$ .

Mez pevnosti v tlaku  $\sigma_p = \bar{\sigma}_p \pm \text{celková odchylka} =$

$= (3,2 \pm 0,2) \cdot 10^6 \text{ Pa} \pm \text{chyba přístrojů} \pm \text{chyba metody}$ .

Chyba přístrojů:  $\pm 0,1 \cdot 10^6 \text{ Pa} \Rightarrow \sigma_p = (3,2 \pm 0,3) \cdot 10^6 \text{ Pa}$ .

b) Pražský cukr:

|                            |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |
|----------------------------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| $m/\text{kg}$              | 63   | 65   | 61   | 67   | 65   | 58   | 65   | 60   | 62   | 65   |
| $\sigma_p/10^6 \text{ Pa}$ | 2,29 | 2,36 | 2,22 | 2,43 | 2,36 | 2,11 | 2,36 | 2,18 | 2,25 | 3,36 |

Povrch, na který jsme tlakovou silou působili, byl  $S = (2,70 \pm 0,05) \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$ .

Průměrná mez pevnosti  $\bar{\sigma}_p = 2,3 \cdot 10^6 \text{ Pa}$ .

Standardní odchylka  $s = 0,1 \cdot 10^6 \text{ Pa}$ , k hrubé chybě nedošlo.

Směrodatná odchylka  $s(\bar{\sigma}_p) = 0,03 \cdot 10^6 \text{ Pa}$ .

Chyba přístrojů:  $\pm 0,1 \cdot 10^6 \text{ Pa}$  Mez pevnosti v tlaku  $\sigma_p = (2,3 \pm 0,1) \cdot 10^6 \text{ Pa}$ .

(3) Opět jsem vložil kostku mezi 2 ocelové destičky. Celá soustava měla zanedbatelnou hmotnost vzhledem k chybě osobní váhy  $\pm 0,5 \text{ kg}$ . Naměřené hodnoty odečtené ze stupnice váhy těsně před rozdrcením jsou v tabulkách.

a) Dobrovecký cukr:

|                            |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |
|----------------------------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| $m/\text{kg}$              | 30   | 43   | 36   | 45   | 31   | 40   | 33   | 35   | 44   | 41   |
| $\sigma_p/10^6 \text{ Pa}$ | 2,01 | 2,89 | 2,41 | 3,02 | 2,08 | 2,68 | 2,22 | 2,35 | 2,95 | 2,75 |

Povrch, na který jsme tlakovou silou působili, byl  $S = (1,46 \pm 0,05) \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$ .

Průměrná mez pevnosti  $\bar{\sigma}_p = 2,54 \cdot 10^6 \text{ Pa}$ .

Standardní odchylka  $s = 0,4 \cdot 10^6 \text{ Pa}$ , k hrubé chybě nedošlo.

Směrodatná odchylka  $s(\bar{\sigma}_p) = 0,1 \cdot 10^6 \text{ Pa}$ .

Chyba přístrojů:  $\pm 0,1 \cdot 10^6 \text{ Pa}$  Mez pevnosti v tlaku  $\sigma_p = (2,5 \pm 0,2) \cdot 10^6 \text{ Pa}$ .

b) Pražský cukr:

|                            |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |
|----------------------------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| $m/\text{kg}$              | 42   | 40   | 43   | 46   | 41   | 45   | 39   | 42   | 41   | 45   |
| $\sigma_p/10^6 \text{ Pa}$ | 1,53 | 1,45 | 1,56 | 1,67 | 1,49 | 1,64 | 1,42 | 1,53 | 1,49 | 1,64 |

Povrch, na který jsme tlakovou silou působili, byl  $S = (2,70 \pm 0,05) \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$ .

Průměrná mez pevnosti  $\bar{\sigma}_p = 1,54 \cdot 10^6 \text{ Pa}$ .

Standardní odchylka  $s = 0,1 \cdot 10^6 \text{ Pa}$ , k hrubé chybě nedošlo.

Směrodatná odchylka  $s(\bar{\sigma}_p) = 0,03 \cdot 10^6 \text{ Pa}$ .

Chyba přístrojů:  $\pm 0,1 \cdot 10^6 \text{ Pa}$  Mez pevnosti v tlaku  $\sigma_p = (1,5 \pm 0,1) \cdot 10^6 \text{ Pa}$ .



## Závěr & diskuse

Metoda použitá v měření (2) dává zřejmě mnohem větší hodnoty než metoda (3). Kde je chyba? V jedné z metod, popřípadě v obou. Možná jste si při svých experimentech všimli, že kritická síla, při které se kostka začne drobit, závisí do jisté míry na časové změně této síly. Pozorování je takové, že při větší časové změně síly vydrží kostka kupodivu víc. Druhá metoda pak má taky nedostatek: spočívá ve zkreslení vlivem už zmíněného faktu, že hrana je vůči tlakové síle „méně odolná“, a tudíž se začne bortit při malém zvýšení tlaku oproti ostatním bodům účinné plochy. Správný výsledek lze očekávat někde mezi výsledky obou metod, rozhodně nebude menší než výsledek metody (3).

Častým zjištěním bylo, že hodnoty meze pevnosti pro jednotlivé kostky téhož druhu cukru se nezanedbatelně lišily. To si lze vysvětlit individuálními fluktuacemi v každé kostce způsobenými při výrobě anebo vnějšími faktory (vlhkost apod.) a také narušením hran některých kostek např. při přepravě. Co se týče systematických chyb, byly to (kromě chyb metod) také chyby přístrojů, nejčastěji osobní váhy – záleželo na použité váze. Někteří řešitelé studovali mez pevnosti v tlaku v různých směrech pro kostky tvaru kvádru a došli k závěru, že v daném smyslu je cukr přibližně izotropní, což odpovídá naší představě. Za dobrý postřeh považuji i to, že kritický tlak závisí i na výšce kostky, tj. rozměru kolmém k účinné ploše.

### Práce potřebná na rozdrcení kostky

K tomuto tématu se vás moc nevyjádřilo. Většinou jste napsali, že horní odhad potřebné práce je  $Fs$ , kde  $F$  je kritická síla na počátku borcení kostky,  $s$  je délka svislé hrany kostky. To byste ovšem museli nějak odhadnout, jak síla  $F$  během drcení závisí na čase. Nezdá se mi být zřejmé ani jisté, že po celé dráze  $s$  působí stejná síla  $F$ . Navíc se při drcení mění plocha, na kterou tlaková síla působí. Pokud jsme na kostku nakladli zátěž o hmotnosti  $M$  a tato zátěž kostku rozdrtila (tedy pokud pod ní nezůstalo nic než elementární krystalky), pak je práce potřebná k rozdrcení menší než rozdíl potenciální energie závaží před a po rozdrcení, to je  $Mg(h_1 - h_2)$ , kde  $(h_1 - h_2) < s$ , tedy  $W < Mgs$ , neboť na podložce zůstane po rozdrcení drť o jisté nenulové výšce  $v$ . Jak velká část z této energie se skutečně využije na drcení, nevíme. Řečený horní odhad vám vycházel řádově v jednotkách Joulu (1 J až 10 J) na rozdrcení jedné kostky. Jinou možností horního odhadu práce je pustit na kostku z výše  $h$  těleso o hmotnosti  $m$  a vyjít z potenciální energie předmětu před pádem.

### Bodování

Jsem rád, že jste tentokrát skutečně všichni experimentovali. Tudíž nikdo nezískal slibovaných 0 bodů. Ve vašich řešeních jsem nejvíce postrádal teorii. Mohli jste za ni získat maximálně 2 body. S popisy měření to už bylo o dost lepší, ale někteří řešitelé jimi také neplýtvali. Za srozumitelný popis měření byl 1 bod, výjimečně bonus 2. Stanovení rozměrů kostky bylo také měřením. Za to byl max. 1 bod. Vlastní měření bylo bodováno podle počtu naměřených hodnot pokud možno pro různé druhy cukru – nejvíce byly 4 body za 10 měření pro každý z pěti druhů cukru, z toho 2 body byly bonusové. Za 10 až 20 měření byly 2 body apod. Za výpočet odchylky měření byl až 1 bod. Obsažné závěry a diskuse vaše řešení rovněž namnoze nekrášlily. Za obojí jste mohli získat celkem 2 body. Za odhad práce potřebné na rozdrcení kostky jste mohli obdržet až 1,5 bodu za nějakou rozumnou úvahu. Byla-li úvaha nerozumná anebo jste napsali pouze  $W = Fs$ , bylo bodování pochopitelně o dost skromnější až nulové. Z bodování vidíte, jak je asi která část úlohy důležitá. Nejdůležitější je samozřejmě experiment sám – bez něj by vám ostatní body uznány nebyly. Půlbody jsem zaokrouhloval po zralé úvaze.

### Filosofický závěr a filosofické poučení

Z vašich výsledků, kdyby se tak nelišily, by se dal sestavit pěkný žebříček našich cukrovarů. Po vzoru pana Dishmana ze známého filmu „Křídýlko nebo stehýnko“ bychom tak

mohli přidělit tři hvězdičky např. Dobroveckému cukrovaru s dovětkem: „cukr z Dobrovce svými báječnými krystalky omámí vaše chuťové buňky, avšak dejte si pozor na protězy.“ Podobně bychom mohli konstatovat: „kostky pro chvíle pohody z Hrušovan se vám rozplynou na jazyku tak, že na to ani 1,4 MPa nepotřebujete.“ A to poučení? Z provedených výzkumů vyplývá, že když se o někom řekne, že je z cukru, může to znamenat skutečně ledacos.

*Matouš Jiráček*

### Řešení úlohy S. 2 ... oběžná dráha Země kolem Slunce (3 body, řešilo 54 studentů)

Tento příklad byl velice jednoduchý. Sloužil pouze k procvičení probrané látky. Z tohoto důvodu jsme jej hodnotili velice přísně a strhávali body i za špatné numerické hodnoty (např. když jste si při řešení Keplerovy rovnice zapomněli přepnout kalkulačku do radiánů).

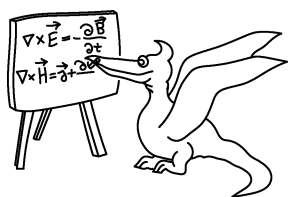
Ze vztahu (II.4) vypočteme nejprve střední anomálii. Jelikož  $t = \frac{1}{4}T$  je  $M = \pi/2$ . Nyní je potřeba vyřešit Keplerovu rovnici (II.8). K tomu použijeme iterační metodu. Vzhledem k tomu, že ji někteří z vás nepochopili, uvedu zde postup řešení podrobněji. V prvním kroku zvolíme  $E_1 = M$ .  $E_2$  pak vypočteme ze vztahu  $E_2 = M + e \sin E_1$  (viz (II.9)). Dále pak postupujeme analogicky. Na začátku si ještě musíme uvědomit, na kolik desetinných míst je potřeba výpočet provádět. Obecně je to dáno přesností vstupních veličin, v našem případě excentricitou zadanou na čtyři desetinná místa, takže bude stačit řešit Keplerovu rovnici s přesností asi o řád větší. V rámci této přesnosti dostáváme hodnotu excentrické anomálie již v druhém kroku:

$$E_1 = M = 1,57080, \quad E_2 = 1,58750, \quad E_3 = 1,58750. \quad (53)$$

Další chybou, která se nejčastěji vyskytovala, je udání  $E$  na nedostatečný počet míst. Hodnota  $E = 1,6$  je sice správná, ale nepostihuje efekty spjaté s eliptičností dráhy Země ( $E$  se liší od  $M$  pouze o 0,0167). Ze vztahů (II.14) a (II.17) pak prostým dosazením dospějeme k číselným hodnotám vzdálenosti  $r$  Země od Slunce a pravé anomálie  $v$ :

$$r = 1,000279 \text{ AU}, \quad v = 91^\circ 54,8'. \quad (54)$$

*Alexander Kupčo*



## Seriál na pokračování

### Kapitola 4: Zdroje energie hvězd

Každé svítící těleso musí mít nějaký zdroj, ze kterého čerpá energii. Energie uvolněná z tohoto zdroje se přenáší z vnitřku hvězdy směrem k povrchu, kde se mění na energii záření vysílaného do okolí. Povrchová vrstva hvězdy tedy sice svítí vlastním světlem, ale zdroj tohoto záření je mimo tuto vrstvu. Názory na zdroj této energie se v minulosti často měnily.

Jako první se otázkou zdroje energie zabýval německý lékař, jeden z objevitelů zákona zachování energie, Julius Robert von Mayer (1814–1878). Jeho názor, že povrch Slunce ohřívají meteoroidy, které na něj neustále dopadají, si budete moci ověřit v naší úloze.

Další objevitel zákona zachování energie, německý fyzik a fyziolog Hermann Ludwig Ferdinand von Helmholtz (1821–1894), přišel s domněnkou, že hvězdy svítí díky stálému

gravitačnímu smršťování. Důsledkem této teorie by byl podstatně rychlejší vývoj hvězdy, než je pozorován. Význačným zastáncem této hypotézy byl i anglický fyzik William Thomson (1824–1907), pozdější lord Kelvin of Largs. Smršťování hvězdy, provázené uvolňováním energie, se proto nazývá *Helmholtz–Kelvinova kontrakce*.

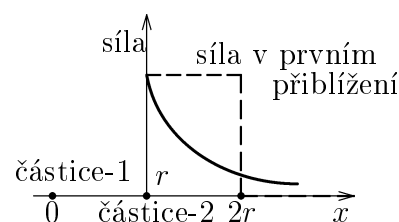
Jak dlouho vydrží hvězda s energií získanou smršťováním? Potenciální energie v bodě  $a$  je  $E_p(a)$ , v bodě  $b$  je  $E_p(b)$  a práce vykonaná přemístěním částice z  $a$  do  $b$  proti působení pole je  $W$

$$E_p(b) - E_p(a) = W. \quad (55)$$

Když se bude částice pohybovat ve směru působení pole, bude práce záporná. V nekonečné vzdálenosti od zdroje pole nepůsobí a potenciální energie je nulová. Tedy platí

$$E_p(a) = -W. \quad (56)$$

Máme-li dvojici částic o hmotnostech  $m_1$  a  $m_2$ , je gravitační potenciální energie podle předchozího vztahu záporná a v absolutní hodnotě se rovná práci vykonané při přemístění jedné z částic do nekonečna. Na částice působí gravitační síla. Jakou práci tedy vykonáme proti působení této síly? Abychom si to trochu zjednodušili, budeme předpokládat, že síla je do vzdálenosti  $2r$  konstantní a dále pak nulová (viz obr.13 – přeřezaná čára). Práce se rovná součinu síly a posunutí:



Obr. 13

$$\frac{\kappa m_1 m_2}{r^2} (2r - r) = \frac{\kappa m_1 m_2}{r}. \quad (57)$$

Gravitační potenciální energie je tedy

$$E_g = -\frac{\kappa m_1 m_2}{r}. \quad (58)$$

Tento vztah, i když je počítán pro sílu v prvním přiblížení, je přesný, a to i v případě, bude-li se jednat o izotropní kouli.

Gravitační energie hvězdy se rovná součtu gravitačních energií všech dvojic částic uvnitř hvězdy. Bude-li se hvězda o hmotnosti  $M$  a poloměru  $R$  skládat z  $N$  částic s hmotnostmi  $m$ , bude počet dvojic roven  $N(N-1)/2$  a typická vzdálenost bude  $R$ . Gravitační energie se pak dá přibližně napsat jako

$$U_g \approx \frac{1}{2} N(N-1) \left( -\frac{\kappa m^2}{R} \right) \approx -\frac{\kappa N^2 m^2}{R}. \quad (59)$$

Využijeme-li vztah  $Nm = M$ , máme

$$U_g \approx -\frac{\kappa M^2}{R}. \quad (60)$$

Při zmenšení poloměru hvězdy z nekonečna na  $R$  se uvolní energie

$$U_g(\infty) - U_g(R) = |U_g(R)|. \quad (61)$$

Část této energie přispívá na ohřev látky uvnitř hvězdy a část se vyzáří. Známe-li zásoby energie ve hvězdě  $U$  a výkon  $L$ , můžeme odhadnout čas, za který je hvězda spotřebuje (zářivý výkon hvězdy předpokládáme konstantní). Platí tedy

$$t = \frac{U}{L}. \quad (62)$$

Dosadíme-li do této rovnice zásobu gravitační energie Slunce, dostaneme čas 40 miliard let, což by mělo být stáří Slunce. Geologové v 19. století odhadli stáří několika usazenin na stamiliardy let, což je značně v rozporu s právě určeným stářím Slunce. Nikdo však tehdy nedokázal, že údaje geologů jsou chybné, a tak otázka této kontrakce zůstala otevřená.

Obrat při hledání zdroje hvězdné energie nastal roku 1905, kdy Albertu Einsteinovi vyšel v časopise *Annalen der Physik* článek o elektrodynamice pohybujícího se tělesa a krátká poznámka o závislosti setrvačnosti tělesa na energii. Zde byly položeny základy speciální teorie relativity a důkaz toho, že při změně energie kteréhokoli fyzikálního systému o  $\Delta E$  se jeho hmotnost změní o  $\Delta E/c^2$ .

Kousek látky tedy obsahuje velké množství energie. Vznikla myšlenka, že hvězdy čerpají energii z anihilace – přeměny látky na záření. Kdyby hvězdy čerpaly energii z anihilace, jejich typický věk by byl asi 20 miliard let. Představa, že se látka uvnitř hvězd mění v záření, se setkala zprvu s nedůvěrou, jelikož stáří hvězd bylo příliš velké – většina dvojhvězd by se musela rozpadnout díky rušivým vlivům sousedních hvězd. Konečným argumentem proti anihilaci byla až model anihilace na mikroskopické úrovni. Anihilace nemůže být zdrojem energie, jelikož nastává prakticky okamžitě po srážce částic s antičásticemi, takže energie takto získaná by se musela uvolnit v jednom okamžiku obrovským výbuchem.

Správnou odpověď uhádl roku 1920 anglický astronom, jeden ze zakladatelů astrofyziky, sir Arthur Stanley Eddington (1882–1944). Vyslovil názor, že Slunce čerpá energii z jaderných reakcí. Do úvahy přicházela především syntéza jader. Jeho odpůrci však tvrdili, že teplota látky ve hvězdách na to nestačí. Důkaz podali roku 1929 Atkinson a Houtermans, kteří dokázali, že termojaderné reakce mohou probíhat uvnitř hvězd. Roku 1938 popsal reakce uvnitř Slunce německý fyzik Hans Bethe a nezávisle na něm i Carl von Weizsäcker. Bethe pak za práci o uvolňování energie ve hvězdách dostal Nobelovu cenu. Odhad stáří Slunce a hvězd na hlavní posloupnosti získaný na základě termojaderných reakcí vychází přibližně 10 miliard let.

Když Slunce spotřebuje svoji zásobu energie za omezený čas, vzniká otázka, kolik ho už uplynulo a kolik ho ještě zbývá. Všeobecně se usuzuje, že celá sluneční soustava vznikla naráz. Stáří Slunce by tedy mělo být stejné jako stáří Země. Dnes je určení stáří Země založeno na radioaktivní přeměně prvků na jejím povrchu a rozbořením chemického složení meteoritů. Řádový odhad stáří je asi 5 miliard let. Tento odhad vyvrací kontrakci a naopak potvrzuje současný názor, že zdrojem energie Slunce je syntéza hélia z vodíku.

### Úloha S .IV ... *Slunce a meteoroidy*

Ověřte hypotézu, že zdrojem energie Slunce jsou meteoroidy dopadající na jeho povrch. Určete, kolik meteoroidů (jejich hmotnost) by muselo dopadnout na Slunce za 1 rok, aby se energeticky pokryl zářivý výkon Slunce  $L_{\odot} = 3,83 \cdot 10^{26}$  W.

Předpokládejte, že se vyzáří veškerá kinetická energie meteoroidů (ve skutečnosti se část této energie spotřebuje na ohřev Slunce a na změnu celkové potenciální energie Slunce). Poloměr Slunce je  $R_{\odot} = 6,96 \cdot 10^8$  m, hmotnost  $1,99 \cdot 10^{30}$  kg.

Určete, o kolik by se za rok změnila velká poloosa a doba oběhu Země díky nárůstu hmotnosti Slunce. Předpokládejte, že se hmotnost Slunce mění skokově a že před touto změnou obíhala Země kolem Slunce po kružnici o poloměru  $a = 1 \text{ AU} = 1,496 \cdot 10^{11}$  m s dobou oběhu  $T = 1$  rok. Při výpočtu použijte přibližný vztah  $(1+x)^k \approx 1+kx$ , který platí pro  $0 \leq x \ll 1, k \in \mathbb{N}$ . Dnes je známa astronomická jednotka s přesností na 2 metry. Bylo by možné tuto změnu naměřit?

***Naše adresa: FKS, KTF MFF UK  
V Holešovičkách 2, 180 00 Praha***