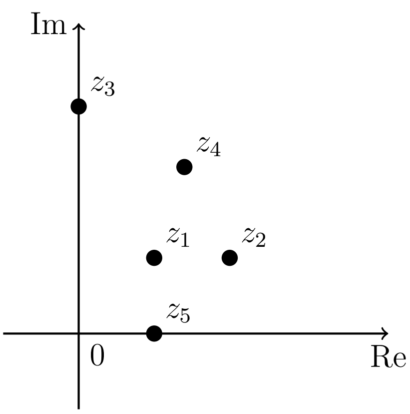
DODATEK A

ÚVODNÍ MATEMATICKÉ OPAKOVÁNÍ

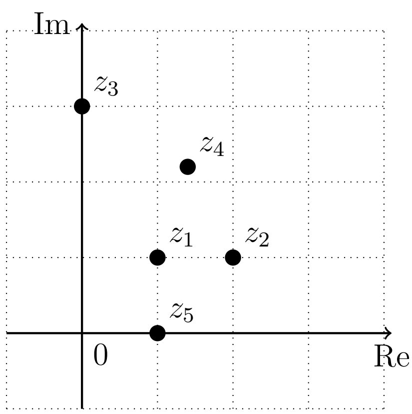
A.1 Komplexní čísla

Komplexní čísla jsou dvoudimenzionální čísla nad jednodimenzionálními reálnými čísly. To znamená, že k vyjádření jednoho komplexního čísla jsou potřeba dvě čísla reálná. Pokud si tedy množinu všech reálných čísel představujeme jako přímku, potom množina všech komplexních čísel je rovina, *Gaussova rovina*. Stejně jako každý bod na přímce je reálné číslo, tak bod v rovině na obrázku je číslo komplexní.

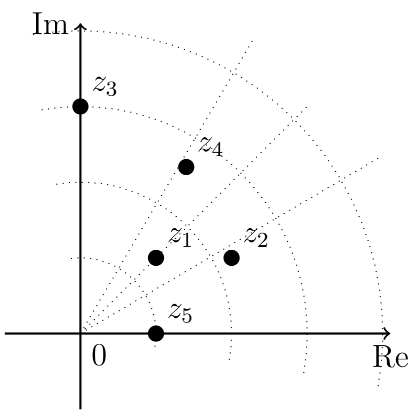
Na obrázku A.1 vidíme pět různých komplexních čísel v Gaussově rovině. Gaussova rovině vznikne zkřížením dvou os – reálné a imaginární osy. Jak nám již název napovídá, na reálné



(a) Obecná Gaussova rovina



(b) Kartézská síť



(c) Polární síť

Obrázek A.1: Na obrázku vidíme sérii bodů v obecné Gaussově rovině.

ose nalezneme veškerá reálná čísla. Imaginární osa obsahuje čísla, jímž říkáme *ryze imaginární*. Obě dvě osy leží v rovině, tudíš reálná i ryze imaginární čísla jsou čísly komplexními. Číslo z_5 je reálné a číslo z_3 ryze imaginární.

Na obrázku (b) jsme na komplexní rovinu natáhli kartézskou síť, tedy síť pouze rovnoběžných a vzájemně kolmých přímek, pomocí nichž dokážeme měřit vzdálenost. Vidíme, že číslo z_1 odpovídá průsečíku dvou přímek, které prochází reálnou a imaginární osou v jednotkové vzdálenosti od počátku.

Každý bode lze tedy pravoúhle spojit s oběma osami za vytvoření obdélníka. Číslo na imaginární ose nazvama *imaginární částí* a číslo na reálné ose *reálnou částí* komplexního čísla. Píšeme

$$\mathcal{R}e[z] = x = \text{reálná část komplexního čísla } z,$$
$$\mathcal{I}m[z] = y = \text{imaginární část komplexního čísla } z.$$

Abychom nemuseli takto složitě zapisovat každé komplexní číslo, budeme psát kompaktněji $z = x + iy$, kde i je imaginární jednotka, o jejích vlastnostech si povíme později, prozatím nám stačí vědět, že číslo násobené i^1 je imaginární částí odpovídající komplexního čísla a číslo úměrné členu i^0. Tomuto zápisu říkáme *algebraický tvar komplexního čísla*

$$z = x + iy \tag{A.1}$$

Na obrázku (c) jsme na Gaussovu rovinu natáhli síť tzv. *polárních souřadnic* (r, φ). První ze souřadnic r udává vzdálenost od počátku. Definuje tedy kružnici, na níž může číslo ležet. Úhel $\varphi \in [0, 2\pi)$ pak definuje místo na kružnici, kdy $\varphi = 0$ odpovídá kladné části reálné osy, $\varphi = \pi$ záporným reálným číslům.

Z definice goniometrických funkcí vidíme na obrázku A.2 vztah mezi kartézskými a polárními souřadnicemi

$$x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi. \tag{A.2}$$

Dosazením těchto vztahů do algebraického tvaru (A.1) tak získáváme *goniometrický tvar komplexního čísla*

$$z = r\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right), \tag{A.3}$$

který bude velice platný především pro pozdější počítání mocnin komplexních čísel.

A.1.1 Rotace v komplexní rovině

Jedním z důležitých příkladů práce s komplexními čísly je jejich rotace. Máme-li z obrázku A.3 orotovat o úhel ψ komlpexní číslo z okolo počátku, dostaneme číslo $z' = x' + iy' = r'(\cos\varphi' + i\sin\varphi')$, přičemž při rotaci platí $r' = r$, tj. vzdálenost čísla od počátku se zachová.

Úhel se změní jednoduše z φ na $\varphi' = \varphi + \psi$. Rotace v polárních souřadnicích je tedy jednoduchá a můžeme psát goniometrický tvar kopmlexního čísla

$$z' = r\big(\cos(\varphi+\psi) + i\sin(\varphi+\psi)\big). \tag{A.4}$$

Naším cílem je nyní zjistit, jak vypadají souřadnice x', y', samozřejmě vidíme z předchozího vztahu, že $x' = r\cos(\varphi+\psi), y' = r\sin(\varphi+\psi)$, ale naše snaha vede k tomu vyjádřit x', y' pouze pomocí zadaného algebraického tvaru, tedy v závislosti na x, y. Využijeme vztahů

$$\cos(\varphi+\psi) = \cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi, \tag{A.5}$$

$$\sin(\varphi+\psi) = \cos\varphi\sin\psi + \cos\psi\sin\varphi \tag{A.6}$$

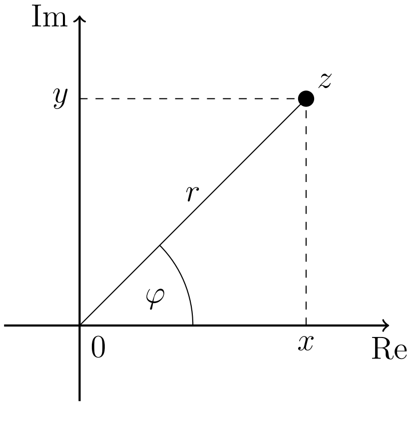
a získáme tak

$$z' = r\,(\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi) + ir(\cos\varphi\sin\psi + \cos\psi\sin\varphi) \tag{A.7}$$

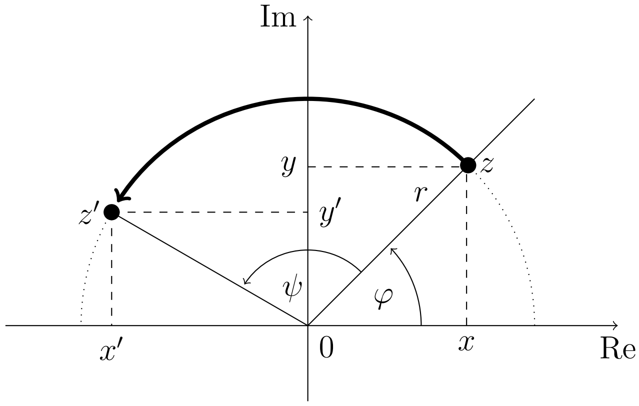
$$= \underbrace{r\cos\varphi}_{x}(\cos\psi + i\sin\psi) - \underbrace{r\sin\varphi}_{y}(\sin\psi - i\cos\psi) = \tag{A.8}$$

$$= x\cos\psi - y\sin\psi + i(x\sin\psi + y\cos\psi) = x' + iy'. \tag{A.9}$$

Jde tedy ukázat, že při rotaci o úhel ψ lze nové souřadnice v algebraickém tvaru napsat ve tvaru



Obrázek A.2: Každé komplexní číslo lze popsat s pomocí polárních či kartézských souřadnic. Obrázek ilustratuje, jak je jednoduché přecházet mezi těmito dvěma sety souřadnic.



Obrázek A.3: Rotace v prostoru lze snáze řešit v polárních souřadnicích přičtením úhlu ψ k úhlu φ.

$$z' = x' + iy' = x\cos\psi - y\sin\psi + i(x\sin\psi + y\cos\psi), \tag{A.10}$$
$$x' = x\cos\psi - y\sin\psi, \tag{A.11}$$
$$y' = x\sin\psi + y\cos\psi \tag{A.12}$$

Našli jsme tedy pravidlo pro rotaci jak pro goniometrický, tak pro algebraický tvar. Tyto vztahy jsou velice důležité a kupříkladu ve fyzice hrají velkou roli při budování teorie rotace tuhého tělesa.

A.1.2 Násobení komplexních čísel

Nyní se pojďme podívat na násobení dvou komplexních čísel. Nejprve si uvědomme jednoduchou věc, která se týká sčítání a odčítání dvou komplexních čísel, totiž tu, že se skutečně jedná o čísla, kde se k i chováme jako k parametru, tudíž jej lze vytýkat. Tento postup jsme použili už v minulé kapitole a platí tedy

$$\mathcal{R}e[z_1 + z_2] = \mathcal{R}e[z_1] + \mathcal{R}e[z_2], \tag{A.13}$$
$$\mathcal{I}m[z_1 + z_2] = \mathcal{I}m[z_1] + \mathcal{I}m[z_2]. \tag{A.14}$$

Násobení dvou komplexních čísel již vyžaduje dívat se na i jako na číslo s určitou vlastností, kterou reálná čísla postrádají. Z předchozí kapitoly víme, jak vypadají transformační vztahy mezi (x, y) a (x', y') při rotaci, tedy známe vztah mezi komplexními čísly z, z'.

Zkusme se podívat na to, co se stane, pokud provedeme součin

$$R_\psi z = (\cos\psi + i\sin\psi)(x + iy) = x\cos\psi + i^2 y\sin\psi + i(x\sin\psi + y\cos\psi), \tag{A.15}$$

kde jsme definovali rotační komplexní číslo R_ψ. Vidíme, že po vynásobení komplexním číslem R_ψ, jehož vzdálenost od počátku je 1, je situace téměř stejná jako při rotaci o úhel ψ, jediným rozdílem je člen s i^2.

> Srovnáním obou výsledků zavádíme rotaci v komplexní rovině coby násobení komplexním číslem R_ψ zavedením fundamentální podmínky komplexních čísel
>
> $$\boxed{i^2 = -1.} \tag{A.16}$$

A.1.3 Mocnění a odmocňování

Zavedením vlastnosti imaginárního čísla i ($i^2 = -1$) jsme zároveň našli efektivní způsob, jak počítat mocniny a odmocniny kladných i záporných čísel.

Umocnění obecného komplexního čísla na druhou jej tak posune ze vzdálenosti r do vzdálenosti r^2 a úhel odtočení se zdvojnásobí. Obecně při z^n můžeme psát

$$z^n = |z|^n[\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)], \tag{A.17}$$

kde jsme nově zavedli značení pro velikost komplexního čísla $|z| = \sqrt{\mathcal{R}e[z]^2 + \mathcal{I}m[z]^2}$, kterou též nazýváme absolutní hodnotou.

Nabízí se otázka, jak je to s odmocněním komplexního čísla. Odmocňujeme-li reálné číslo x^2 je výsledkem vždy x, tj. funkce *odmocnina* přiřazuje číslu x^2 číslo x. To však neznamená, že neexistuje i jiné číslo než x, které po umocnění na druhou dá x^2. V reálných číslech víme, že taková čísla jsou dvě, konkrétně $\pm x$.

Odmocněním komplexního čísla z budeme mít na mysli n. odmocninu $\sqrt[n]{x} = z^{1/n}$, která číslu z přiřazuje všechna čísla z_i, pro která platí $z_i^n = z$. Než uvedeme úvodní příklad, je potřeba zavést novou operaci:

$\boldsymbol{z}$	$\boldsymbol{\lvert z\rvert}$	$\boldsymbol{\varphi}$	$\boldsymbol{z^2}$	$\boldsymbol{z^3}$,
4	$\sqrt{4^2+0^2} = 4$	0	$4^2(\cos(2\cdot 0) + i\sin(2\cdot 0)) = 16$	$4^3 = 64$
-3	$\sqrt{(-3)^2+0^2} = 3$	π	$3^2(\cos(2\pi) + i\sin(2\pi)) = 9$	$3^9\cos(3\pi) = -27$
$2i$	$\sqrt{0^2+2^2} = 2$	$\frac{\pi}{2}$	$2^2(\cos\pi + i\sin\pi) = -4$	$2^3 i\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -8i$

Ke komplexnímu číslu z definujeme operaci komplexního sdružení tak, že komplexně sdružené číslo $\bar{z} = z^* = \mathcal{R}e[z] - i\mathcal{I}m[z]$. Geometricky se jedná o nalezení osově symetrického partnera dle reálné osy v Gaussově rovině k číslu z. Např. $z = 3 + 5i$ dá $z^* = 3 - 5i$.

Motivační příklad: Nechť je dáno číslo $z = 1 + i$, k němu číslo komplexně sdružené je $z^* = 1 - i$. Nyní se podíváme na to, jak vypadá druhá mocnina čísla, tedy rotujeme čísla z o $\pi/4$ a z^* o $-\pi/4$ radiánů. Čekáme, že tedy nalezneme ryze imaginární čísla, skutečně

$$z^2 = (1 + i)^2 = 1^2 + 2i + i^2 = 2i, \tag{A.18}$$

$$(z^*)^2 = (1 - i)^2 = 1 - 2i + i^2 = -2i, \tag{A.19}$$

polární úhlová souřadnice čísla je tak pro z^2 rovna $\pi/2$ a pro $(z^*)^2$ $3/2\pi$. Pokud tedy tato čísla ještě jednou kvadraticky umocníme, mělo by se první číslo otočit na π, komplexně sdružené na $3\pi \simeq \pi$. Čísla by se tedy měla rovnat. A skutečně

$$z^4 = 4i^2 = -4, \tag{A.20}$$

$$(z^*)^4 = 4i^2 = -4. \tag{A.21}$$

Odtud můžeme jasně říci, že řešíme-li úlohu $z = \sqrt[4]{-4}$, potom dvě řešení jsou $z_1 = 1+i$, $z_2 = 1 - i = z_1^*$. Našli jsme tedy efektivní způsob, jak počítat odmocniny záporných čísel!

Ovšem stále jsme nepřišli na všechna řešení. Existují ještě další dvě $z_3 = -1+i$ a $z_4 = -1-i$. Po složitějších teoretických úvahách lze dojít k tomu, kolik je vlastně řešení. Berme jako fakt následující poučku

Je-li dána rovnice $z = \sqrt[n]{x}$, kde $x \neq 0$, potom má rovnice n řešení a ta mají tvar

$$\forall k \in \{1, 2, \ldots, n\} : z_k = \sqrt[n]{|z|} \left[\cos\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right) + i \sin\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right) \right], \tag{A.22}$$

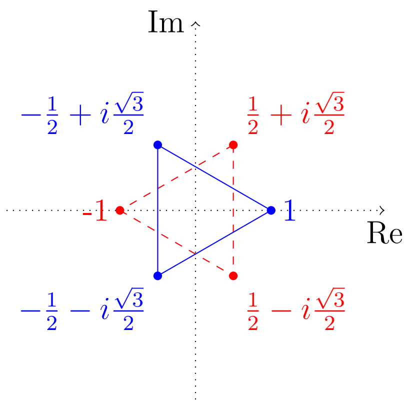
v Gaussově rovině tvoří pravidelný n-úhelník, jehož středem je komplexní číslo $0 + 0i = 0$.

Zvýrazněné pravidlo pro odmocňování lze velice jednoduše odvodit z toho, že funkce sin, cos jsou 2π periodické. To znamená, že komplexní číslo dané úhlem φ lze stejně dobře popsat úhlem $\varphi + 2k\pi$. Už jsme ukázali, že mocnění čísla odpovídá rotaci, konkrétně si můžeme rozmyslet, že n. mocnina komplexního čísla dá úhel $n\times$úhel původní. Není tedy zvláštní, že v odmocnině čekáme úhel φ/n.

Pokud jsme tvrdili, že jako úhel φ je možné komplexní číslo zapsat libovolným z čísel $\varphi+2k\pi$ pro celé číslo k, můžeme se nyní zamyslet nad tím, co se stane, pokud takové číslo odmocníme. Očividně jeho n. mocnina dá opět námi hledané číslo, navíc ovšem číslo dané úhlem $(\varphi+2k\pi)/n$ je odlišné od čísla prvního, pokud není k násobkem n. Efektivně tedy řeší rovnici s odmocninou libovolné číslo dané úhlem $(\varphi + 2k\pi)/n$, ovšem pro $k > n$ nebo $k < 1$ už dostáváme stejná čísla, která jsou v rozmezí $k \in \{1, \ldots, n\}$.

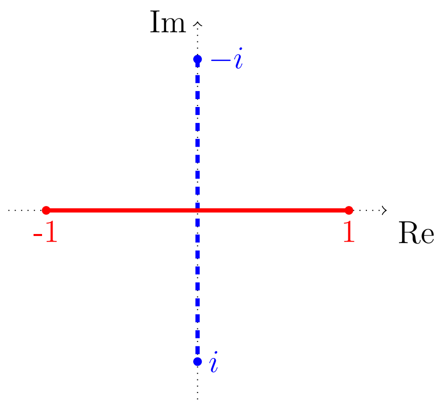
Liché odmocniny reálných čísel

Lichá odmocnina má vždy jedno reálné řešení, to může ležet buď v kladné části, nebo v záporné části reálné osy odpovídajíce tomu, jaké znaménko mělo číslo pod odmocninou. Na obrázku vidíme třetí odmocninu z čísla -1 červeně a z čísla 1 modře.



Sudé odmocniny reálných čísel

U sudých odmocnin záleží na tom, jaké je znaménko čísla pod odmocninou. Je-li znaménko kladné, leží jedno z řešení v kladné části reálné osy, jedno v záporné. Je-li signum čísla pod odmocninou záporné, existují dvě řešení na ose imaginární. Modře: $\sqrt{-1}$, červeně: $\sqrt{1}$.



Z geometrického hlediska bychom mohli najít jiné pravidelní n-úhelníky, které nemají ani jeden z vrcholů na libovolné z os. Taková čísla také řeší úlohu, ale s obecným komplexním číslem pod odmocninou, těmi se zde zabývat nebudeme.

A.1.4 Řešení kvadratických rovnic

Pohybová rovnice

Pro ukázku využití komplexních čísel mimo geometrickou interpretaci přejděme do analytiky, v níž je potřeba řešit kvadratické rovnice. V diferenciálním počtu, o němž budeme mluvit později, lze formulovat rovnici harmonického oscilátoru

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0, \tag{A.23}$$

jedná se o pohybovou rovnici, jejímž výsledkem je trajektorie závaží zavěšeného na pružině $x(t)$, přičemž $\omega^2 = k/m$ je poměr tuhosti pružiny a hmotnosti závaží.

V praxi se taková rovnice řeší pomocí přepsání do polynomu, kdy místo složitých derivací využíváme jednoduché mocniny, za každou tečnu přidáme mocninu. Člen $\ddot{x}$ tak nahradíme λ^2

a člen x žádnou tečku nemá, proto jej nahradíme za $\lambda^0 = 1$. dostáváme novou rovnici

$$\lambda^2 + \omega^2 = 0. \tag{A.24}$$

Obecná poučka nám říká, že vyřešíme-li předchozí rovnici, potom výsledné řešení bude odpovídat funkci $x(t) = Ae^{i\lambda t}$, kde A je libovolná konstanta. Vyřešit rovnici již nyní není problém, neboť víme, že

$$\lambda^2 = -\omega^2 = i^2\omega^2 \qquad \longrightarrow \qquad \lambda = \pm i\omega. \tag{A.25}$$

Dostáváme tedy dvě řešení (druhá odmocnina), která sečteme, abychom dostali řešení celkové. To má tedy tvar

$$x(t) = A_1 e^{i\omega t} + A_2 e^{-i\omega t}, \tag{A.26}$$

přičemž konstanty A_1, A_2 v tuto chvíli neznáme. Vidíme však, že bez znalosti komplexních čísel a jejich odmocňování bychom se dále nedostali. Řešení však ještě upravme se znalostí následujícíc poučky.

> Zápis e^z lze zapsat také jako $\exp(z)$, jedná se o dva různé zápisy stejné funkce, jíž nazýváme exponenciála. Platí vztah
>
> $$e^{iz} = \exp(iz) = \cos(z) + i\sin(z). \tag{A.27}$$

Nyní můžeme řešení upravit dosazením tohoto vztahu a využitím sudosti funkce kosinus, lichosti funkce sinus

$$x(t) = \underbrace{(A_1 + A_2)}_{B_1}\cos(\omega t) + \underbrace{i(A_1 - A_2)}_{B_2}\sin(\omega t) = B_1\cos(\omega t) + B_2\sin(\omega t), \tag{A.28}$$

což je již řešení, které známe ze středních škol. Další úpravou bychom mohli získat $x(t) = x_{\max}\cos(\omega t + \varphi)$, to zde již ukazovat nebudeme a čtenář si tak může sám úlohu dopočítat a zjistit, v jakém vztahu jsou konstanty A_1, A_2 a $x_{\max}, \varphi$.

Zadaná rovnice

Spočtěme obecně zadanou rovnici

$$x^2 + 5x + 7 = 0, \tag{A.29}$$

hledejme x, které takovou rovnici vyřeší. Prvním krokem je vždy spočítat diskriminant a zjistit jeho znaménko

$$D = b^2 - 4ac = 25 - 4 \cdot 7 \cdot 1 = 25 - 28 = -3. \tag{A.30}$$

Doposud byl člověk zvyklý říci, že rovnice nemá řešení, jelikož diskriminant je záporný. V tuto chvíli bychom měli poznamenat, že rovnice nemá reálná řešení, avšak víme, že komplexní existovat budou. Připomeňme, že důvodem neexistence reálných řešení je, že používáme odmocninu z diskriminantu, která je v tomto případě ryze imaginární.

Stejně jako v případě kladného diskriminantu jsme uvažovali pouze kladná řešení, stejně tak u ryze imaginárního, tj. $\sqrt{-3} = i\sqrt{3}$. Dostáváme tedy

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-5 \pm i\sqrt{3}}{2} = -\frac{5}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}. \tag{A.31}$$